1986年3月

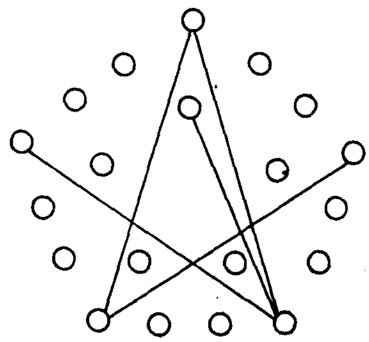
数学研究与评论
第六卷 第一期

一个给定图中Hamilton圈数的计算定理*

施 永 兵

（上海市崇明中学）

众所周知，“一个图中有多少H圈”的问题是一个未解决的很困难的问题〔1〕（其中H圈是Hamilton圈的简称）。我们约定本文讨论的图都是有限简单图，所用图论术语和记号凡不加定义的均采自参考文献〔2〕。用$e(G)$记图G的边数。当$e(G)>e(\overline{G})$特别当$e(G)$很大而$e(\overline{G})$很小时，直接数遍图G中的H圈是十分困难的。例如一个阶为20的圈G^*，其补图为仅有5条边的图$\overline{G}^*$（见图1），这个图G^*含有33837381945368000个H圈。这是一个惊人的数据。显然要直接数遍这个图G^*的H圈是很难办到的。本文应用容斥原理，推导一个计算图G所含的H圈数的公式，使用这个公式可以方便地求出一些图的H圈数。



图一

§Ⅰ．一些概念和定理

给定阶为p的图G，设$\overline{G}$是G的补图，$E(\overline{G})=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。作$S=\{H\,|\,H$是$E(\overline{G})$的子集在$\overline{G}$中的导出子图$\}$，其中$E(\overline{G})$的子集$\phi$（空集）在$\overline{G}$中的导出子图记为$\phi$，它是不含$\overline{G}$的边和顶点的空图。现在我们对S中的元关于所含边的数目作一分类$S=\bigcup_{i=0}^{m}S_j$，使$|E(H)|=j$的H属于S_j。显然$S_0=\{\phi\}$，

$S_j=\{H\,|\,H=H_{i_1i_2\cdots i_j}$是$E(\overline{G})$中含有边$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_j}$的子集在$\overline{G}$中导出子图，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant m\}$，$j=1,2,\cdots,m$。

用ω记H（$H\in S$）的连通分支数，在S上定义图函数f如下：

$$f(H)=\begin{cases}0 & \Delta(H)\geqslant 3 \text{ 或H是阶数小于} p \text{ 的圈,}\\ 2^{\omega-1}, & \text{其他,}\end{cases}$$

其中$H\in S$。

令$a_j=\sum_{H\in S_j}f(H)$，$j=0,1,2,\cdots,m$，显然当$m>p$时，对$H\in S_j$（$j=p+1,p+2,\cdots\cdots,m$），$f(H)=0$，从而$a_j=0$。

再用N（G）表示G中H圈的数目，定义$0!=(-1)!=1$，于是我们有下面的定理给定阶为p的图G，$m=|E(\overline{G})|$，则

* 1983年10月21日收到。

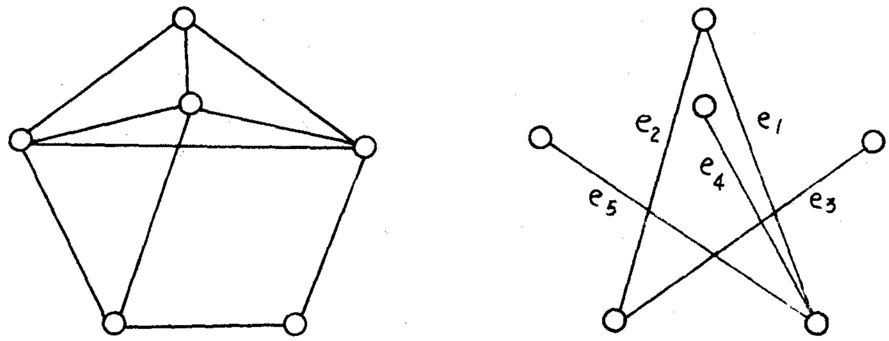
$$
N(G)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{j}a_{j}\cdot(p-j-1)! & \text{当}m\leqslant p\text{时,}\\ \sum\limits_{j=0}^{p}(-1)^{j}a_{j}\cdot(p-j-1)! & \text{当}m>p\text{时,}\end{cases}
$$

其中$a_j=\sum\limits_{H\in S_j}f(H)$，$j=0,1,2,\cdots\cdots$，$m$．

§2．应用举例

本节用一个例子说明定理的有效性。

例．计算图2中图G的H圈数。



(a) 图G　　(b) $\overline{G}$

图　2

解：我们作G的补图$\overline{G}$，则$E(\overline{G})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$。再作S且对S分类即$S=$

$=\bigcup\limits_{j=0}^{5}S_j$，其中$S_0=\{\phi\}$；$S_1=\{H_i|i=1,2,3,4,5\}$；$S_2=\{H_{i_1i_2}|1\leqslant i_1<i_2\leqslant 5\text{且}i_1,i_2\in Z\}$；

$S_3=\{H_{i_1i_2i_3}|1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant 5\text{且}i_1,i_2,i_3\in Z\}$；

$S_4=\{H_{i_1i_2i_3i_4}|1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4\leqslant 5\text{且}i_j\in Z,\ j=1,2,3,4\}$；

$S_5=\{H_{12345}\}$。

容易算出：$a_0=2^{-1}=\frac{1}{2}$；$a_1=5\times 2^0=5$；$a_2=5\times 2^0+5\times 2'=15$；

$a_3=3\times 2^0+6\times 2'+1\times 0=15$；$a_4=2\times 2^0+1\times 2'+2\times 0=4$；

$a_5=1\times 0=0$，所以

$N(G)=\frac{1}{2}(p-1)!-5\cdot(p-2)!+15\cdot(p-3)!-15\cdot(p-4)!+4(p-5)!$（*）由于$p=6$，所以$N(G)=4$。

注意（*）式是对于凡补图的边集在补图中的导出子图与图2中$\overline{G}$同构的一切图的H圈的计算公式。

正如文章开头所述的阶为20的图G^*，因为它的补图$\overline{G}^*$的边集$E(\overline{G}^*)$在$\overline{G}^*$中的导出子图与图2中$\overline{G}$同构，所以把$p=20$代入（*）式，立得$N(G^*)=33837381945368000$．

§ 3．定理的证明

应用客斥原理，我们立即得到

引理 1　设给定阶为p的图G，$E(\overline{G})=\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_m\}$，$G+E(\overline{G})=K_p$，再设$A_i$（$i=1,2,\cdots\cdots,m$）是在$K_p$中所有经过$e_i$的H圈所成的集合，由集类$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m\}$所张成的环为R，在R上定义集函数$\mu$如下：

$\mu(A)=A$中元素的个数，$A\in R$，

则

$$\mu(\sum_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_j<m}\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})。$$

现在我们叙述和证明

引理 2 $\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})=f(H_{i_1i_2\cdots i_j})\cdot(p-j-1)!$

证明　对任意$j\in\{1,2,\cdots\cdots,m\}$，$H_{i_1i_2\cdots i_j}\in S_j$。

若$\Delta(H_{i_1i_2\cdots i_j})\geqslant 3$或$H_{i_1i_2\cdots i_j}$是阶数小于$p$的一个圈，显然不存在经过$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots\cdots, e_{i_j}\}$中所有边的H圈，因而$\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})=0$，而据$f$的定义知$f(H_{i_1i_2\cdots i_j})=0$，即$f(H_{i_1i_2\cdots i_j})\cdot(p-j-1)!=0$，此时引理成立。

否则，$H_{i_1i_2\cdots i_j}$或是各连通分支都是路，或是H圈。

若$H_{i_1i_2\cdots i_j}$的各连通分支都是路，设$H_{i_1i_2\cdots i_j}$的连通分支数为ω，我们把$H_{i_1i_2\cdots i_j}$中每个连通分支看作一颗彩珠，把$V(G)-V(H_{i_1i_2\cdots i_j})$中各个顶点也看作彩珠，所以共有彩珠$|V(G)|-|V(H_{i_1i_2\cdots i_j})|+\omega=p-(\omega+j)+\omega=p-j$个，可以把它们看成互不相同的，它们串成珠圈的穿法数为$\frac{1}{2}\cdot(p-j-1)!$，而$H_{i_1i_2\cdots i_j}$的每个分支都有两个端点，所以我们还应该把ω个分支中每一个都看成是由2颗不同的彩珠粘连在一起，而$\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})$的值正是我们设想的模型即珠圈的穿法数，所以

$$\mu(A_{i_1i_2\cdots i_3})=2^{\omega}\cdot\frac{1}{2}\cdot(p-j-1)!=2^{\omega-1}(p-j-1)!=f(H_{i_1i_2\cdots i_j})\cdot(p=j-1)!$$

若$H_{i_1i_2\cdots i_j}$是一个H圈，则$j=p$，显然$\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j})$
$=\mu(A_{i_1i_2\cdots i_p})=1$，而$f(H_{i_1i_2\cdots i_j})\cdot(p-j-1)!=f(H_{i_1i_2\cdots i_p})\cdot(p-p-1)!$
$=2^{1-1}\cdot(-1)!=1$，此时引理也成立。

定理的证明　考虑定理中的条件，若$m=0$，则图G就是完全图K_p，$N(G)=N(K_p)=\frac{1}{2}\cdot(p-1)!$ 定理的结论显然成立。若$m\neq 0$，则图$G=K_p-E(\overline{G})$。以下分两种情况讨论：

情况 1．$0<m\leqslant p$。由于$\sum_{i=1}^{m}A_i$表示所有至少经过$\{e_1, e_2\cdots\cdots, e_m\}$中一条边的H圈的集合，所以

$$N(G)=N(K_p)-\mu(\sum_{i=1}^{m}A_i)$$

应用引理 1，得

$$N(G)=N(K_p)-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_j<m}\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})$$

$$=N(K_p)+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j}\sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_j<m}\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_j})$$

应用引理 2，得

$$N(G)=N(K_p)+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j}\sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_j<m}f(H_{i_1i_2\cdots i_j})\cdot(p-j-1)!$$

$$=\frac{1}{2}(p-1)!+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j}\sum_{H\in S_j}f(H)\cdot(p-j-1)!$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\sum_{H\in S_j}f(H)\cdot(p-j-1)!=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\cdot a_j\cdot(p-j-1)!$$

其中$a_j=\sum\limits_{H\in S}f(H)$，$j=0,1,2,\cdots\cdots,\ m$．

情况 2，$m>p$. 由于当$p<j\leqslant m$时，$a_j=0$,所以仿照情况 1 的证明，可得

$$N(G)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\cdot a_j\cdot(p-j-1)!$$

其中$a_j=\sum\limits_{H\in S_j}f(H)$，$j=0,1,2,\cdots\cdots,\ p$，于是定理证毕。

§4．定理的推论

值得注意的是当某些特殊情形时，定理能用明显公式给出。

推论1　设M是K_p的任意一个对集，$|M|=m$，则

$$N(K_p-M)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\cdot 2^{j-1}\cdot C_m^j\cdot(p-j-1)!\quad(p\geqslant 2m)$$

证明　令$G=K_p-M$，则$E(\overline{G})=M$。因为M是对集，所以在定理中对任意$H\in S_j$，$f(H)=2^{j-1}$且$|S_j|=C_m^j$，于是$a_j=\sum\limits_{H<S_j}f(H)=2^{j-1}C_m^j$。应用定理中的公式，便得

$$N(K_p-M)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{j}\cdot 2^{j-1}\cdot C_m^j\cdot(p-j-1)!,\ (p\geqslant 2m)$$

推论2 设T^*是含于K_p的任意一颗星，$|E(T^*)|=m$,则$N(K_p-E(T^*))=\frac{1}{2}\cdot(p-1)!-m\cdot(p-2)!+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot(p-3)!\ (p\geqslant m+1)$。

证明　令$G=K_p-E(T^*)$，则$E(\overline{G})=E(T^*)$。因为T^*是一颗星，所以在定理中任意$H\in S_1+S_2$，$f(H)=1$，而$|S_1|=m$，$|S_2|=C_m^2=\frac{1}{2}m(m-1)$，任意$H\in S_j(j=3,4,\cdots,m)$，$f(H)=0$。所以$a_0=\frac{1}{2}$，$a_1=\sum\limits_{H\in S_1}f(H)=m$，$a_2=\sum\limits_{H\in S_1}f(H)=\frac{1}{2}m(m-1)$，$a_j=0,j=3,4,\cdots\cdots,\ m$，应用定理的公式，便得

$$N(K_p-E(T^*))=\frac{1}{2}\cdot(p-1)!-m\cdot(p-2)!+\frac{1}{2}m\cdot(m-1)\cdot(p-3)!\ (p\leqslant m+1)$$

参考文献

〔1〕Bermond, J. C., Hamilton Graph, in Selected Topics in Graph Theory, Edited by Beinke and Wilsom, 1978, p. 127—167.

〔2〕Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. Graph Theory with Applications, Amer. Elsevier, New York, 1976.

A Counting Theorm for Hamilton Cyclic Number of a Given Graph

Shi yong bing

(Chongming Middle Schod, Shanghai)

Abstract

In this paper, we derive a formula for counting the number of Hamilton cycles in a given graph G. Let e(G) be the number of the edges in G. Using this formuld, we obtain easily the number of Hamilton cycles in G if $e(G) > e(\overline{G})$ and $e(\overline{G})$ is small.