1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

关于Shannon的容量问题*

李 乔

（中国科学技术大学）

1．问题简历

这里要阐述的问题，最早是C.Shannon在1956年提出的[1]，尔后，C.Berge在其1958年出版的书“图论及其应用”[2]中，把它列为未解决的问题之一；O.Ore在其1962年出版的“图论”一书中，又专列一节论述这个问题。从此Shannon的这个问题广为传播，成为一个著名的图论难题。事隔25年后，C.Berye在其1973年英文版的“图与超图”[4]一书中，再次专门提出了这个问题，更加提高了Shannon问题的知名度和挑战性。

为了叙述简明，先定义两个图论名词（以下所说的图，都是无环、无重边的无向图）：

1° 设图G的顶点集为V(G)。V(G)中一组点称为G的一个无关点组，若组中任意两点不邻接。G的所有无关点组中，所含顶点个数的最大值称为G的（点）无关数，记为$\alpha(G)$。

2° 设图G和H的顶点集分别是V(G)和V(H)，定义G和H的强乘积图[1)] G.H如下：G・H的顶点集是$V(G)\times V(H)$；其中两个不同的顶点(x,y)和(x',y')相邻接当且仅当x和x'在G中相等或相邻，同时y和y'在H中相等或相邻。

特别地，简记e个G的强乘积$\underbrace{G\cdot G\cdots\cdot G}_{e}=G^e$。

例 记5边形图（即5个顶点的圈）为C_5，其顶点集$V(C_5)=\{0,1,2,3,4\}$，顶点i和i'相邻当且仅当$i\equiv i'+1 \pmod 5$。易见$\alpha(C_5)=2$。这时$C_5^2=C_5\cdot C_5$的顶点集是$\{(i,j):0\leqslant i,j\leqslant 4\}$，其中两个不同的顶点$(i,j)$和$(i'j')$相邻当且仅当

$$i\equiv i' \text{或} i'\pm 1 \pmod 5,\quad i\equiv j' \text{或} j'\pm 1 \pmod 5$$

可以验证，$\alpha(C_5^2)=5$，$\{(0,0),(2,1),(4,2),(1,3),(3,4)\}$是$C_5^2$的无关点组。

现在可以表述C.Shannon引入的基本概念3：

定义 对图G，定义数

$$Ⓗ(G)=\sup_e \sqrt[e]{\alpha(G^e)},$$

并称为G的Shannon容量（Shannon capacity of G）。

不难根据定义直接验证下述性质成立：

1° 对任意两个图G和H，成立$\alpha(G\cdot H)\geqslant\alpha(G)\alpha(H)$，从而$\alpha(G^e)\geqslant[\alpha(G)]^e$，Ⓗ$(G)\geqslant\alpha(G)$。

2° 图G的一组两两相邻的顶点称为G的一个点团，一族点团若构成G的顶点集的一个划分（partition），则称为G的一个点团划分。G的所有点团划分中，所含点团个数的最小

*1984年5月8日收到。

1）C.Berge称为正规积（normal product，见〔4〕，p.377）。

值称为G的点团划分数，记为$\kappa(G)$。例如$\kappa(C_5)=3$，$\kappa(C_6)=3$。从定义易知$\alpha(G)\leqslant\kappa(G)$，$\kappa(G\cdot H)\leqslant\kappa(G)\kappa(H)$。从而$\alpha(G^l)\leqslant\kappa(G^l)\leqslant[\kappa(G)]^l$，Ⓗ$(G)\leqslant\kappa(G)$。

Shannon在1956年指出[1]，除C_5外，顶点数不超过6的图G都满足$\alpha(G)=\kappa(G)$，从而都有Ⓗ$(G)=\alpha(G)$。但对C_5，因为$\alpha(C_5)=2$，$\alpha(C_5^2)=5$，$\kappa(C_5)=3$，所以只知道$\sqrt{5}\leqslant$Ⓗ$(C_5)\leqslant 3$。据此Shannon提出前面所说的问题（称为Shannon的容量问题）：

$$Ⓗ(C_5)=?$$

当然，对一般的图G也都有确定其容量Ⓗ(G)的问题，但即使对C_5这样极简单的图，求出其容量Ⓗ(C_5)的精确值已经很难。事实上，从1956到1978这二十多年中，虽然人们想方设法希望求出Ⓗ(C_5)，但可以说基本上没有取得什么进展。值得一提的事情主要只有下面两件：

1. 人们发现从性质$\alpha(G\cdot H)\geqslant\alpha(G)\alpha(H)$出发，不难通过数列极限的讨论证明〔见〔4〕，p383〕

$$\sup_l \sqrt[l]{\alpha(G^l)}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\alpha(G^l)}$$

2. 在1967年证明了[5]Ⓗ$(C_5)\leqslant\frac{5}{2}$

未能取得实质性进展的原因可能在于，人们希望先求出看上去简单的数$\alpha(C_5^l)$，再由此确定它们的极限Ⓗ(C_5)。但沿这条路线的努力并未奏效，直到1974年，还只求出了[6]$\alpha(C_5^3)=10$和$\alpha(C_5^4)=25$，它们离确定Ⓗ$(C_5)=\lim\limits_{l\to\infty}\sqrt[l]{\alpha(C_5^l)}$的精确值还差得很远。这种久攻不下的局面一直保持到1978年。

1978年2月（收稿日期），匈牙利数学家L.Lovász另辟蹊径，一举攻克了这个难题[7]。Lovasz证明了这个难以求得的数正是其已知下界：

$$Ⓗ(C_5)=\sqrt{5}$$

不仅如此，他还对任意一个图G都给出了其Shannon容量Ⓗ(G)的一个上界$\theta(G)$，并得到了关于$\theta(G)$的一系列重要性质，从这些性质几乎可以直接求出$\theta(C_5)=\sqrt{5}$，以及Peterson图的Shannon容量是4等漂亮结果。

下面分节阐述Lovasz的上界$\theta(G)$；Ⓗ$(C_5)=\sqrt{5}$的证明；以及θ，Ⓗ的一些深刻性质。对前两个内容都给予完整的定义和证明，对后一内容则列而不证。作为结束，再就笔者所知，概述一下Lovász的工作发表后，有关Shannon容量的一些研究工作以及面临的新的挑战性问题。

2. Ⓗ(G)的上界$\theta(G)$

设图G的顶点集$V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$。称某欧氏空间中的一组n个单位向量$\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_n\}$为G的一个标准正交表示（an orthonormat representation，以下简记为ONR），如果G中两个不同顶点i，j不相邻蕴涵$\vec{u}_i$和$\vec{u}_j$正交，即内积$(\vec{u}_i,\vec{u}_j)=0$[1)]。显然，若$\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_n\}$是G的一个ONR，且$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$是G的无关点组，则$\{\vec{u}_{i_1},\vec{u}_{i_2},\cdots,u_{i_k}\}$是$k$个两两正交的单位向量。因此，对任一单位向量$\vec{C}$，必有

$$1=|\vec{C}|^2\geqslant\sum_{j=1}^{k}(\vec{C},u_{i_j})^2\geqslant k\min_{1\leqslant j\leqslant k}(\vec{C},u_{i_j})^2,$$

从而

1) 以下记向量$\vec{u}$和$\vec{v}$的内积为$(\vec{u},\vec{v})$，再记$|\vec{u}|=\sqrt{(\vec{u},\vec{u})}$。

$$R \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} (\vec{c}, \vec{u}_{i_j})^2} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\vec{c}, \vec{u}_i)^2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{(\vec{c}, \vec{u}_i)^2}$$

Lov'asz 称数

$$\min_{|\vec{c}|=1} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{(\vec{c}, \vec{u}_i)^2} \right)$$

为G的ONR $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ 的值，并定义$\theta(G)$为G的所有ONR的值的最小者，即

$$\theta(G) = \min_{\{\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n\}} \left(\min_{|\vec{c}|=1} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{(\vec{c}, \vec{u}_i)^2} \right) \right),$$

其中 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ 取G的任一ONR [1]。

下面证明如上定义的$\theta(G)$的基本性质

引理 1 $\alpha(G) \leqslant \theta(G)$

证 由$\theta(G)$的定义及上述说明立得，因可取无关组 $\{i_1, \cdots, i_k\}$，使$k = \alpha(G)$。

引理 2 $\theta(G \cdot H) \leqslant \theta(G)\theta(H)$。

证 令 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$、$\vec{c}$和 $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$、$\vec{d}$分别是G和H中达到$\theta(G)$ 和$\theta(H)$ 的ONR和单位向量。则$\vec{c} \otimes \vec{d}$是mn维单位向量，$\{\vec{u}_i \otimes \vec{v}_j: 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ 是G · H的ONR [2]。因此

$$\theta(G \cdot H) \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \frac{1}{(\vec{c} \otimes \vec{d},\ \vec{u}_i \otimes \vec{v}_j)^2}.$$

因为 $(\vec{c} \otimes \vec{d}, \vec{u}_i \otimes \vec{v}_j) = (\vec{c}, \vec{u}_i)(\vec{d}, \vec{v}_j)$，所以

$$\theta(G \cdot H) \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \frac{1}{(\vec{c}, \vec{u}_i)^2 (\vec{d}, \vec{v}_j)^2} = \theta(G)\theta(H)。$$

定理 1 $\alpha(G) \leqslant Ⓗ(G) \leqslant \theta(G)$。

证 由引理 1 和 2 可得

$$[\alpha(G)]^l \leqslant \alpha(G^l) \leqslant \theta(G^l) \leqslant [\theta(G)]^l,$$

从而$\alpha(G) \leqslant Ⓗ(G) \leqslant \theta(G)$。

3 Shannon 问题的解

定理 2 $Ⓗ(C_5) = \sqrt{5}$。

证 我们将证明$\theta(C_5) \leqslant \sqrt{5}$，由此显然可得$Ⓗ(C_5) = \sqrt{5}$。

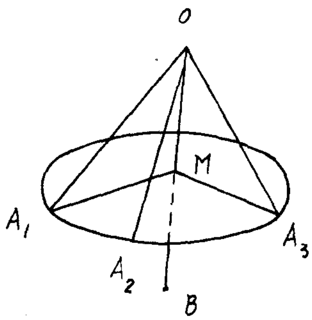
设想一把有 5 根伞骨的伞，记伞的顶点为O，伞骨顺次为OA_1，OA_2，OA_3，OA_4, OA_5，伞把为OB且设 $|OA_1| = \cdots = |OA_5| = |OB| = 1$。现将此伞逐渐撑开，直到诸伞骨间夹角的

1）对给定的图G，上述定义中的ONR及单位向量$\vec{c}$实际上可规定在某一确定的$n+1$维欧氏空间中取，从而易知G的所有ONR的值的最小值可达到。

2）对p维向量$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_p)$和q维向量$\vec{y}(y_1, \cdots, y_q)$，定义$pq$维向量$\vec{x} \otimes \vec{y} = (x_1 y_1, \cdots, x_1 y_q, \cdots, x_p y_1, \cdots, x_p y_q)$。

最大值等于$\frac{\pi}{2}$. 这时，$\{\overrightarrow{oA_1}, \overrightarrow{oA_2}, \cdots, \overrightarrow{oA_5}\}$ 成为C_5的一个ONR。

记$A_1, A_2, \cdots, A_5$这 5 点所在的平面与OB的交点为M，则有



$$|OA_1| = |OA_3| = 1, \quad \angle A_1OA_3 = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle A_1MA_3 = \frac{2}{5}2\pi, \quad |A_1A_3| = \sqrt{2},$$

$$|A_iM|\sin\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{但}\sin\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\therefore |OM|^2 = 1 - |A_1M|^2 = 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{10}} = 1 - \frac{4}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_i})^2 = |OM|^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad i = 1, \cdots, 5,$$

因此
$$\theta(C_5) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 5} \frac{1}{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_i})^2} = \sqrt{5}。 ∎$$

4 Ⓗ(G)和θ(G)的其他性质

除了Ⓗ(G·H)$\leqslant\theta(G)\leqslant\theta(H)$，Ⓗ(G)$\leqslant\theta(G)$外，Lovász 还证明了Ⓗ和$\theta$的一系列深刻性质。现择要罗列如下：

定理 3 对任意两个图G和H，成立

$$\theta(G\cdot H) = \theta(G)\theta(H) \quad ∎$$

定理 4 设G是点可迁图，$\overline{G}$是G的补图，则 $\theta(G)\theta(\overline{G}) = |G|$（≡G的顶点数）。∎

推论 对点可迁图G成立不等式 Ⓗ(G) Ⓗ($\overline{G}$) $\leqslant |G|$。特别地，令$G = C_5$，则$\overline{G} = C_5$，Ⓗ$(C_5) \leqslant \sqrt{5}$。∎

定理 5 设G是k度正则图，$|G| = n$。记G的邻接矩阵的 n 个特征值为$\lambda_1 = k, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，其中$\lambda_n$是最小特征值。则

$$\theta(G) \leqslant \frac{-n\lambda_n}{K-\lambda_n},$$

且当G边可迁时等式成立。∎

推论 设n是奇数，则

$$\theta(C_n) = \frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}}。$$

特别地，$\theta(C_5) = \sqrt{5}$。∎

作为上列性质的应用，Lovász 研究了kneser图$K(n, r)$（$2r<n$）：$K(n, r)$ 的顶点是$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 r 元子集，两个顶点相邻接当且仅当这两个 r 元子集的交是空集。容易验证，$K(5, 2)$ 正是熟知的Peterson图。

定理 6 $\alpha(K(n,r))=\Theta(K(n,r))=\theta(K(n,r))=\binom{n-1}{r-1}$ ∎

注意到定理 6 的结论之一 $\alpha(K(n,r))=\binom{n-1}{r-1}$ 正是著名的Erdös—Ko—Rado 定理。

鉴于Ⓗ和 θ 的良好性质，Lovász 提出下面三个问题：

（1）是否对每个图G都成立 Ⓗ(G) $=\theta$(G)？

（2）是否对每一对图G，H都成立 Ⓗ(G·H) = Ⓗ(G)Ⓗ(H)？

（3）是否对每个图G都成立 Ⓗ(G)Ⓗ($\overline{G}$) $\geqslant |G|$？

显然，（1）成立⇒（2）成立⇒（3）成立。同时，若（1）成立，则可以认为对任意图的Shannon容量问题有了实质性的新认识。

5．Lovász 的论文发表后的情况

首先，W.Haemers 很快举出反例，说明Lovász 的三个问题都有否定回答[8]，论文发表在刊登Lovász论文的同刊、同卷的后一期上！所举反例是所谓的Schlafli 图S。S有27个点，其它有关参数如下表所示：

	α	Ⓗ	θ
$\overline{S}$	3	3	3
S	6	⩽7	9

由此易知

Ⓗ(S) $\leqslant 7<\theta$(S) = 9 ——否定（1），

Ⓗ(S·$\overline{S}$) $\geqslant |S| = 27>$ Ⓗ(S)Ⓗ($\overline{S}$) = 21 ——否定（2）,（3）。

Haemers 还引入Ⓗ（G）的一个新的上界 R(G)[9]。他证明了对若干类强正则图G来说，有 R(G) $<\theta$(G)；但对大多数图G来说，θ(G) $\leqslant R$(G)。这个上界 R(G) 的一个明显弱点是它一定是整数。

另外，A.Schrijver[10][11]也研究了上界 θ(G) 和其它上界的关系。但总的说来，在〔7〕,〔8〕之后，似乎还没有很深入的新结果。

6．结　　语

L.Lovász 冲破了二十多年来Shannon 容量问题停滞不前的局面，出色地求出Ⓗ(C_5) = $\sqrt{5}$，引进了一个好的上界 θ(G)。但仍有不少问题尚待解答。最引人注目的是

问题　Ⓗ(C_7) = ?

目前已知 $\alpha(C_7)=3$，$\alpha(C_7^2)=10$，$\alpha(C_7^3)\geqslant 33$[6]；$\theta(C_7)=\dfrac{7\cos\frac{\pi}{7}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}$。所以

Ⓗ(C_7) $\geqslant\sqrt[3]{33}\approx 3.20753$，Ⓗ($C_7$) $\leqslant\theta(C_7)\approx 3.31767$。

迄今为止，甚至尚未求得 $\alpha(C_7^3)$ 的值。

参 考 文 献

〔1〕Shannon, C. E., The zero-error capacity of a noisy channel, IRETrans. Inform. Theory, vol. I T-2, no. 3 (1956), 8—19.

〔2〕Berge, C., Théorie des Graphes et Applications, Dunod, Paris, 1958.

〔3〕Ore, O., Theory of Graphs, AMS, Rhode Island, 1962.

〔4〕Berge, C., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, 1973.

〔5〕Rosenfeld, M., On a problem of Shannon, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 315—319.

〔6〕Sonnemann, E. and Krafft, O., Independence numbers of products graphs, J. of Comb. Theory (B), 17 (1974), 133—142.

〔7〕Lovaśz, L., Qn the Shannon Copacity of a graph, IEEE Trans. Inform. Theory, vol IT—25, no.1 (1979), 1—7.

〔8〕Haemers, W., On some problems of lovaśz concerning the Shannon capacity of a graph, 同上刊, 同卷no. 2, 231—232.

〔9〕——, An upper bound for the Shannon capacity of a graph, "Algebraic methods in graph theory", 267—272. L. Lovaśz, V. T. So's Ed. Colloguia Math. Soc. János Bolyai, 25. North-Halland, 1981.

〔10〕Schrijver, A., A comparison of the Delsarte and Lovaśz bounds, 同〔7〕刊, 同卷no. 4, 425—427.

〔11〕——, Association schems and the shannon capacity: Eberlein polynomials and the Erdös-Ko-Rado theorem, 同〔9〕.

On the problem of shannon capacity

Li Qiao

(Univ. of Sci. Tech. of China)

This is a brief survey on the Shannon capacity problem, laying emphasis on the contributions by L. Lovaśz.