1986年5月

数学研究与评论
第六卷第二期

# 从$\mathscr{T}$-同调球到$\mathscr{T}$-紧致Hausdorff空间的$\mathscr{T}$映射问题的一个定理

张 增 喜

（北京师院分院）

## §0.序言及主要结果的陈述

在1947年，B. Knaster曾提出下列推测：

给定从$(m+n-2)$-维的球面$S^{m+n-2}$到$m$-维欧氏空间$R^m$的连续映射$f: S^{m+n-2}\longrightarrow R^m$以及$n$个不同的点$e_1, \cdots, e_n \in S^{m+n-2}$，是否存在一个旋转$r$，使得$f(re_1)=\cdots=f(re_n)$？

对于这一问题已有不少人研究过[3]：例如，

当$m=1$，$n=3$且$e_1, e_2, e_3$(作为向量)互相垂直时,Kakutani给出了证明（我们称之为Kakutani定理）…。

已有的方法都是针对不同的具体情况，个别地加以处理。整个问题还远没有解决。

最近的一个值得注意的推进是由何伯和给出的[3]。他用的工具是奇异上同调式的Smith周期变换的理论而考虑的空间是弧连通的Hausdorff空间。

围绕K-氏问题的研究，本文试图从另一途径进行：我们用Čech-同调式的Smith周期变换的理论（特异同调）而考虑的空间是有限维紧致Hausdorff空间。容易看出，对原来的问题来说，这个空间范畴是够用的。这样做法的好处是：由于对空间的维数及类型作了具体的限制，在以Čech-同调式的Smith周期变换理论为工具进行探讨时，使问题考虑起来较简单（例如，同调群只是有限维的且不为0）也更具体。

在以上思路的指引下我们证明了本文的主要定理（定理（0.2））。至于进一步的一些问题（例如〔3〕中提到的“指数”问题等）的讨论留在以后的文章中进行。

设X是拓朴空间，$T: X\rightarrow X$是由X到自身的拓朴变换。我们称T为周期变换，如果存在有限的正整数$n$使得$T^n=(T)^n; X\rightarrow X$是恒同变换1，显见，$\mathscr{T}=\{1, T, \cdots, T^{n-1}\}$构成一个循环变换群。其中T为生成元，使得$T^n$为恒同变换的最小正整数叫做T的周期，通常以$p$表示。我们不把恒同变换列入周期变换，换言之，$p>1$．具有T的空间X我们记为$(X, \mathscr{T})$且称之为$\mathscr{T}$-空间。

在本文中，X，$\tilde{X}$等一般表示紧致Hausdorff空间。

**（0.1）定义.** 设$(X, \mathscr{T})$，$(\tilde{X}, \mathscr{T})$是具有同样周期变换群的空间，我们定义它们之间的映射

$$f:(X, \mathscr{T})\rightarrow(\tilde{X}, \mathscr{T})$$

为连续映射$f: X\rightarrow\tilde{X}$使得$f\cdot T=T\cdot f$，表

* 1985年3月9日收到。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \widetilde{X} \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{f} & \widetilde{X} \end{array}$$

可交换，并称$f$为$\mathscr{T}$-映射或等变映射。

我们把由（X，$\mathscr{T}$）至（$\widetilde{X}$,$\mathscr{T}$）的$\mathscr{T}$-映射之集合记为$M_{\mathscr{T}}(X, \widetilde{X})$。

在本文中，我们主要建立下面的定理：

**(0.2)定理**．设（X，$\mathscr{T}$），（$\widetilde{X}$，$\mathscr{T}$）是$\mathscr{T}$-空间，其中X是在整数mod $p$群$J_p$上的$m$-维同调球，$p$是素数，$\widetilde{X}$是$n$维（$n<m$）的紧致Hausdorff空间，而T是X及$\widetilde{X}$上的周期为$p$的拓朴变换且在其上均无不动点，则$M_{\mathscr{T}}(X, \widetilde{X})=\phi$。

作为初步应用，利用本定理我们证明了Borsuk-Ulam定理及Kakutani定理。从而得到了该两定理的新证法。

## §1．准备知识

除了D表示有向集外，其它所有记号都采用〔1〕中的记法或惯常自明的记法。有关的内容可参阅〔1〕及〔2〕。

## §2．Čech同调形式的Smith周期变换理论（特异同调）

命$T$是$X$上周期为素数$p$的变换，F是$T$的不动点集（可以是空集）。有关内容可参阅〔1〕及〔2〕。

考虑（X，$\mathscr{T}$），并设F＝φ，取〔2〕中（1.2）的Σ为特异素质复盖的完全系，则对于Σ中的每个$U_\lambda(\lambda\in D)$，$F_\lambda=\phi$，设$c_{o\lambda}\in C_0(K_\lambda, G)$是任一0－维链，以$KI(c_{o\lambda})$表示$c_{o\lambda}$的Kronecker指数。

**(2.1)命题**．设$G=J_p$，$c_{o\lambda}\in C_0(K_\lambda, J_p)$，则$\rho c_{o\lambda}$是0－维闭链即$\rho c_{o\lambda}\in Z_0(K_\lambda, J_p)$，从而$\rho c_{o\lambda}\in {}^{\bar{\rho}-1}Z_0(K_\lambda, J_p)$（0－维$\bar{\rho}$－闭链群）。

**(2.2)命题**．设$G=J_p$，$c_{o\lambda}\in C_0(K_\lambda, J_p)$，于是$\bar{\rho}c_{o\lambda}$是一个0－维$\rho$-闭链，即$\bar{\rho}c_{o\lambda}\in {}^{\bar{\rho}-1}Z_0(K_\lambda, J_p)$且如果$\bar{\rho}c_{o\lambda}\sim_\rho O$，即$\bar{\rho}c_{o\lambda}=\partial(\widetilde{a}_{1\lambda})$，$\widetilde{a}_{1\lambda}\in {}^{\rho-1}C_1(K_\lambda, J_p)$，则$KI(c_{o\lambda})=0$．

**(2.3)命题**．对于$\lambda>\mu$，$\lambda$，$\mu\in D$，可有$z_{o\lambda}\to\pi^\lambda_\mu(z_{o\lambda})$，我们断言$k_0(z_{o\lambda})$的值与$\lambda(\lambda\in D)$无关，即$k_0(z_{o\lambda})=k_0(\pi^\lambda_\mu(z_{o\lambda}))$。

**(2.4)命题**．对于$\lambda>\mu$，$\lambda$，$\mu\in D$，如果$\pi^\lambda_\mu(z_{o\lambda})\sim_\rho z_{0\mu}$，则有$k_0(\pi^\lambda_\lambda(z_{o\lambda}))=k_0(z_{o\mu})$.

**(2.6)定义**依据（2.1）—（2.5）可确定一个映射$k_0:{}^{\bar{\rho}-1}H_0(X, J_p)\to J_p$，它显然是一个同态，我们称它为指数同态（注意：它是在$T$无不动点情况下定义的）。

**(2.7)定理**．对于仍在前述下的X，$T$，如果$H_0(X, J_p)=0$，则$k_0:{}^{\bar{\rho}-1}H_0(X, J_p)\to J_p$是同构，因此，依据〔2.（3.6）〕$k_0:{}^{\bar{\rho}}H_0(X, J_p)\to J_p$亦然。

(2.8)设$f$:（X，$\mathscr{T}$）→（$\widetilde{X}$，$\mathscr{T}$）是$\mathscr{T}$-映射，如果$F\subset X$，$\widetilde{F}\subset\widetilde{X}$分别是X，$\widetilde{X}$上$T$的不动点集，则显然$f(F)\subset\widetilde{F}$。

(2.9)命题 设$G=J_p$。对于给定的$f:(X,\mathscr{T})\to(\widetilde{X},\mathscr{T})$，$f$可诱导出下列正合同调$\rho$-序列及其之间的同态的图表而且这个图表是可交换的：

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho^{-1}}H_s \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & H_s \arrow[r, "j_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & {}^{\rho}H_s \arrow[r, "k_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho*}"] & {}^{\rho^{-1}}H_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}H_0 \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & H_0 \arrow[r, "j_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & H_0 \arrow[d, "f_{\rho*}"] \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_s \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_s \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_s \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_0 \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_0 \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_0
\end{tikzcd}
$$

(2.10)命题设$f:(X,\mathscr{T})\to(\widetilde{X},\mathscr{T})$是$\mathscr{T}$-映射，其中$T$在X和$\widetilde{X}$上无不动点，如果$f_{\rho^{-1}*}:{}^{\rho^{-1}}H_0(X,J_\rho)\to{}^{\rho^{-1}}H_0(\widetilde{X},J_\rho)$是由于诱导的同态，则有$k_0\cdot f_{\rho^{-1}*}=k_0$，即图表

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\rho^{-1}}H_0(X,J_\rho) \arrow[d, "f^{-1}_*"] \arrow[dr] & \\
{}^{\rho^{-1}}H_0(\widetilde{X},J_\rho) \arrow[r] & J_\rho
\end{tikzcd}
\qquad (\rho=\sigma,\tau)
$$

是可交换的。

(2.11)设$n$为有限非负整数，X是一个维数为$n$(记为$\dim X=n$)的紧致拓朴空间，则它的所有维数$\geqslant n+1$的同调群均为O，即$H_s(X,G)=0\quad(s\geqslant n+1)$

(2.12)命题 设$(X,\mathscr{T})$为$\mathscr{T}$-空间，$n$为有限非负整数，$\dim X=n$，X紧致，$F\subset X$是T的不动点集（可以是空集）$p$为素数，则${}^{\rho}H_s(X,J_p)=H_s(F,J_p)=0\,(s\geqslant n+1)$。

(2.13)命题 设$(X,\mathscr{T})$为$\mathscr{T}$-空间，X为$J_p$上的$n$-维同调球，$p$为素数，T无不动点，则

$$
{}^{\rho}H_n(X,J_p)\approx H_n(X,J_p)\approx J_p。
$$

## §3．定理（0.2）的证明及应用举例

在（0.2）的假设下，如果$M\ (X,\widetilde{X})\neq\phi$，则存在$f:(X,\mathscr{T})\to(\widetilde{X},\mathscr{T})$。依据命题（2.9），（2.10），$f$可诱导出下列正合同调$\rho$-序列及其之间同态的图表而且这图表是可交换的：

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho^{-1}}H_s \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & H_s \arrow[r, "j_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & {}^{\rho}H_s \arrow[r, "k_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho*}"] & {}^{\rho^{-1}}H_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}H_0 \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\rho^{-1}*}"] & H_0 \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & {}^{\rho}H_0 \arrow[d, "f_{\rho*}"] \arrow[dr, "k_0"] & \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_s \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_s \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_s \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\rho^{-1}}\widetilde{H}_0 \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_0 \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_0 \arrow[r, "k_0"] & J_p
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

又由于$F=\phi$，$\widetilde{F}=\phi$，依据〔2;（3.6)〕有

$$
{}^{\rho^{-1}}H_s(X,J_p)={}^{\bar\rho}H_s(X,J_p),\quad {}^{\rho^{-1}}H_s(\widetilde{X},J_p)={}^{\bar\rho}H_s(\widetilde{X},J_p)。
$$

所以（3.1）又可化成

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {}^{\bar\rho}H_s \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\bar\rho}"] & H_s \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & {}^{\rho}H_s \arrow[r, "k_\rho"] \arrow[d, "f_\rho"] & {}^{\bar\rho}H_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\bar\rho}"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\bar\rho}H_0 \arrow[r, "i_\rho"] \arrow[d, "f_{\bar\rho}"] & H_0 \arrow[r, "j_\rho"] \arrow[d, "f_*"] & {}^{\rho}H_0 \arrow[d, "f_\rho"] \arrow[dr, "k_0"] & \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\bar\rho}\widetilde{H}_s \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_s \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_s \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\bar\rho}\widetilde{H}_{s-1} \arrow[r, "i_\rho"] & \cdots \arrow[r, "k_\rho"] & {}^{\bar\rho}\widetilde{H}_0 \arrow[r, "i_\rho"] & \widetilde{H}_0 \arrow[r, "j_\rho"] & {}^{\rho}\widetilde{H}_0 \arrow[r, "k_0"] & J_p
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

在（3.2）中将$\rho$与$\bar\rho$交换，则得类似的交换图表（3.2)′。再把（3.2）和（3.2)′中含有同态$k_\rho$和$k_{\bar\rho}$的“方框”依维数递降的次序交错地连接起来，并将$\rho$和$\bar\rho$依次（交错）地记为$\rho_s$，$\rho_{s-1}$，…，由于（3.2）和（3.2)′的可交换性，所得下列的“缩合”图表也是可交换的：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho_s}\mathrm{H}_s \arrow[r, "k_{\rho_s}"] \arrow[d, "f_{\rho_s *}"] & {}^{\rho_{s-1}}\mathrm{H}_{s-1} \arrow[r, "k_{\rho_{s-1}}"] \arrow[d, "f_{\rho_{s-1} *}"] & {}^{\rho_{s-2}}\mathrm{H}_{s-2} \arrow[r, "k_{\rho_{s-2}}"] \arrow[d, "f_{\rho_{s-2} *}"] & {}^{\rho_{s-3}}\mathrm{H}_{s-3} \arrow[r, "k_{\rho_{s-3}}"] \arrow[d, "f_{\rho_{s-3} *}"] & \cdots \arrow[r, "k_{\rho_3}"] & {}^{\rho_2}\mathrm{H}_2 \arrow[r, "k_{\rho_3}"] \arrow[d, "f_{\rho_2 *}"] & {}^{\rho_1}\mathrm{H}_1 \arrow[r, "k_{\rho_1}"] \arrow[d, "f_{\rho_2 *}"] & {}^{\rho_0}\mathrm{H}_0 \arrow[r, "k_0"] \arrow[d, "f_{\rho_0 *}"] & \mathrm{J}_p \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\rho_s}\widetilde{\mathrm{H}}_s \arrow[r, "k_{\rho_s}"] & {}^{\rho_{s-1}}\widetilde{\mathrm{H}}_{s-1} \arrow[r, "k_{\rho_{s-1}}"] & {}^{\rho_{s-2}}\widetilde{\mathrm{H}}_{s-2} \arrow[r, "k_{\rho_{s-2}}"] & {}^{\rho_{s-3}}\widetilde{\mathrm{H}}_{s-3} \arrow[r, "k_{\rho_{s-3}}"] & \cdots \arrow[r, "k_{\rho_3}"] & {}^{\rho_2}\widetilde{\mathrm{H}}_2 \arrow[r, "k_{\rho_3}"] & {}^{\rho_1}\widetilde{\mathrm{H}}_1 \arrow[r, "k_{\rho_1}"] & {}^{\rho_0}\widetilde{\mathrm{H}}_0 \arrow[ur, "\tilde{k}_0"'] &
\end{tikzcd}$$

因此，由（3.3）有：

$$k_0 k_{\rho_1} \cdots k_{\rho_s} = k_0 k_{\rho_1} \cdots k_{\rho_s} f_{\rho_s *} ; \ {}^{\rho_s}\mathrm{H}_s(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \to \mathrm{J}_p \ .$$

特别地，令$s=m$，则有

（3.4） $$k_0 k_{\rho_1} \cdots k_{\rho_m} = k_0 k_{\rho_1} \cdots k_{\rho_m} f_{\rho_m *} : \ {}^{\rho_m}\mathrm{H}_m(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \to \mathrm{J}_p 。$$

但由于X是$m$-维同调球，所以在增广情况下有

$$\mathrm{H}_s(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) = \begin{cases} 0 & (s \geqslant 0,\ s \neq m) \\ \mathrm{J}_p & (s = m) \end{cases}$$

此外，又由（3.3）中的关于$(\mathrm{X}, \mathcal{T})$的同调$\rho$-序列的正合性直接可以看出

$$k_{\rho_s}: \ {}^{\rho_s}\mathrm{H}_s(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \to {}^{\rho_{s-1}}\mathrm{H}_{s-1}(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \qquad (m \geqslant s \geqslant 1)$$

都是在上同态（实际上，易见$k\rho_{m-1}$，…，$k\rho_1$都是同构，而从（2.3）的证明中知$j_{\rho_m}\mathrm{H}_m(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p)=0$，故$k_{\rho_m}$也是同构）。又由（2.13）知${}^{\rho_m}\mathrm{H}_m(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \approx \mathrm{J}_p$，而由（2.7），$k_0$也是同构，因而$k_0 k_{\rho_1} \cdots k_{\rho_m}$; ${}^{\rho_m}\mathrm{H}_m(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \to \mathrm{J}_p$是同构。

另外，依据（2.12），${}^{\rho_s}\mathrm{H}_s(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{J}_p) = 0 \quad (s \geqslant n+1)$。由于$m > n$（自然$m \geqslant n+1$）所以${}^{\rho_m}\mathrm{H}_m(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{J}_p) = 0$，因此，$k_0 p_{\rho_1} \cdots k_{\rho_m} f_{\rho_m *}$： ${}^{\rho_m}\mathrm{H}_m(\mathrm{X}, \mathrm{J}_p) \to \mathrm{J}_p$显然只能是0-同态。从而（3.4）不能成立，所得到的矛盾证明了我们的定理（0.2）。

利用定理（0.2）可重新证明

**（3.5）推论**（Borsuk-Ulam定理）设$f$: $\mathrm{S}^m \to \mathrm{R}^m$是连续映射，则存在$e \in \mathrm{S}^m$使得$f(e) = f(-e)$。

设$\{e_1, e_2, e_3\}$是3-维欧氏空间$\mathrm{R}^3$中的标准正交基向量，$\mathrm{R}_3$是绕原点的旋转群，$\mathrm{A} \subset \mathrm{R}_3$为由$e_1, e_2, e_3$绕$(e_1+e_2+e_3)$的置换群，$\overline{\mathrm{R}}^2 \subset \mathrm{R}^3$为过原点垂直于$(e_1+e_2+e_3)$的平面，$\overline{\mathrm{S}}^1$是$\overline{\mathrm{R}}^2$上的单位球面，定义$\mathrm{A}_3$在$\mathrm{R}_3$上的运算如下：

$$a \circ r = ra^{-1}, \quad a \in \mathrm{A}_3 \text{ 是}\mathrm{A}_3\text{的生成元，} r \in \mathrm{R}_3 \ 。$$

借助定理（0.2）还可重新证明

**（3.6）定理** $\mathrm{M}_{\mathrm{A}_3}(\mathrm{R}_3, \overline{\mathrm{S}}_1) \neq \phi$ 。

利用定理（3.6）又可重新证明

**（3.7）推论**（Kakutani定理）设$f$: $\mathrm{S}^2 \to \mathrm{R}^1$是连续映射，$\{e_1, e_2, e_3\}$是标正交基向量，则一定存在$r \in \mathrm{R}_3$，使得$f(re_1) = f(re_2) = f(re_3)$

致谢：感谢我的老师北京大学廖山涛教授、承蒙廖先生提供了选题和给予的指教，另外，对吉林大学何伯和老师给予的有益指教也表示谢意。

## 参 考 文 献

〔1〕S.D. Liao, A theorem on periodic tramsformations of homology spheres, Ann. of Math. vol 56(1952) pp.68—83.

〔2〕P.A. Smith, Fixed Points of Transformations, Appendix B. in S. Lefschetz, Algebraic Topology, New York 1942, PP.350 —373 .

〔3〕何伯和，从球面到欧氏空间的连续映射，《数学年刊》1981年2卷2期。