1986年 5 月

数学研究与评论
第六卷 第二期

有限群中一个未解决的丢番图方程

孙 琦

（四川大学）

在文〔1〕中，我们曾介绍在有限群的研究中提出的二个丢番图方程

（1） $p^m-2q^n=\pm 1, p、q$是素数，$m>1, n>1$ 的求解问题，并提到Crescenzo在文〔2〕中证明了定理：除开$239^2-2.13^4=-1$以外，方程（1）如有放，则$m=n=2$。

最近发现[3] $3^5-2.11^2=1$ 也满足方程（1），因此，上述Crescenzo的定理是错的。错误产生的原因在于该文引理1用了论断："$1+\omega q^k$（其中$k<n,(w,q)=1$）对模q^n有阶q^{n-k}"，此论断在$k=0$时不成立。而$k=0$时，导出丢番图方程

（2） $3^m-2q^n=1, m>1, n>1, 2\nmid m, q$是奇素数，对于方程（2），除开$m=5$，$n=2$，$q=11$以外，是否还有其他的解？是一个未解决的问题。很可能，方程（2）无其他的解。

关于方程（2），以下结果是显然的。

1．如果方程（2）有解，则$q\equiv 1 (\bmod 12)$

2．由Ljunggren在〔4〕中的结果，可得：方程（2）在$2|n$时，除开$m=5$，$n=2$，$q=11$以外，无其他的解。于是，可设（2）中n适合$2\nmid n$。

3．如果方程（2）有解，则

$$\left(\frac{q}{13}\right)=\left(\frac{q}{757}\right)=1$$

其中$\left(\frac{a}{q}\right)$代表Legendre符号。

顺便指出，Crescenzo在〔2〕中提出的问题：是否有无穷多对素数p、q适合$p^2-2q^2=\pm 1$？我们认为，等号右边的$+1$是多余的。因为取模4便知$p^2-2q^2=1$除开$p=3$，$q=2$以外，无其他的素数解p、q。而$p^2-2q^2=-1$是困难的问题。最近，屈明华证明了 p、$q<10^{15}$时，$p^2-2q^2=-1$仅有三组解：$(p、q)=(7, 5)$，$(41, 29)$，$(63018038201, 44560482149)$。

参 考 文 献

〔1〕柯召、孙琦，数学研究与评论，2(1983)，131-134.

〔2〕Crescenzo, P., Adv. Math. 17(1975), 25-29.

〔3〕施武杰，西南师大研究记录第一卷.

〔4〕Ljunggren, W., Norsk. Mat. Tidsskr. 1, Hefte 25(1943), 17-20.

*1986年 1 月 4 日收到