柱面上带有周期强迫项的 Lienard方程周期解的存在性*

吴 兴 宝

（武汉钢铁公司钢铁研究所）

§1. 引 言

廿多年来很多人对柱面上二阶非线性方程进行了研究，但对柱面上带强迫项的二阶非线性振动方程的研究却不多。近年来有人对锁相技术中的常微分方程进行了定性分析[1]。最近在文[2]中讨论了柱面上较一般的系统

$$\ddot{\varphi}+f(\varphi)\dot{\varphi}+g(\varphi)=e(t)\,, \tag{1}$$

获得解有界和周期解存在的条件：（1）$|e(t)|<M_1$；（2）$g(o)=0$，$g(\varphi)=-g(-\varphi)$，$g'(\varphi)\geqslant\gamma>0$；（3）$f(\varphi)\geqslant a>0$；（4）$\int_0^{\pm\pi}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi=+\infty$。在这里，要求$f(\varphi)$严格正。我们试图寻求这一条件不满足情况下周期解存在的判别准则。

本文讨论柱面上带有周期强迫项的Lienard方程（1）。其中，$e(t)$是一个周期为ω的连续周期函数，$f(\varphi)$和$g(\varphi)$是二个具有公共周期（不妨设周期为2π）的周期函数，它们在（$-\pi$，π）内是连续的，並且满足解的唯一性条件。我们建立了下述二个周期解存在的判别准则：

定理1. 如果Ⅰ. $\left|\int_0^t e(t)\mathrm{d}t\right|<M$；

Ⅱ. $g(o)=0$，$\varphi g(\varphi)>0$ 当$-\pi<\varphi\neq 0<\pi$时，且$\int_0^{\pm\pi}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi=+\infty$；

Ⅲ. 对于$F(\varphi)=\int_0^\varphi f(\varphi)\mathrm{d}\varphi$，存在常数$\overline{\varphi}\in(o,\pi)$、$\overline{\overline{\varphi}}\in(-\pi,o)$、$F^*$及$F_*$，使得

$F^*-F_*>2M$，

$F(\varphi)>F^*(\overline{\varphi}<\varphi<\pi)$ 及$F(\varphi)<F_*(-\pi>\varphi<\overline{\overline{\varphi}})$。

那末方程（1）的解终于有界；从而，它至少存在一个以ω为周期的周期解。

定理2. 设Ⅰ. $g(o)=0$，$\varphi g(\varphi)>0$（$-\pi<\varphi\neq 0<\pi$）且存在常数$\overline{\varphi}\in(0,\pi)$及$\overline{\overline{\varphi}}\in(-\pi,0)$使得

$$g(\varphi)>M\ (\overline{\varphi}<\varphi<\pi)\text{ 及 }g(\varphi)<-M\ (-\pi<\varphi<\overline{\overline{\varphi}})\,,$$

其中$M=\max\limits_{0<t<\omega}|e(t)|$；

Ⅱ. $\lim\limits_{\varphi\to\pm\pi}\int_0^\varphi[g(\varphi)+f(\varphi)sgn\varphi]\mathrm{d}\varphi=+\infty$；

Ⅲ. 对于$F(\varphi)=\int_0^\varphi f(\varphi)\mathrm{d}\varphi$，存在常数$F^*$及$F_*$，使得$F(\varphi)>F^*(\overline{\varphi}<\varphi<\pi)$及

* 1981年12月21日收到。

$F(\varphi)<F_*(-\pi<\varphi<\varphi)$;

Ⅳ. $\overline{\lim\limits_{\varphi\to+\infty}}\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi}\frac{M+g(\varphi)}{F(\varphi)-F^*}\mathrm{d}\varphi<+\infty$; 或Ⅳ′ $\underline{\lim\limits_{\varphi\to-\infty}}\int_{\bar{\bar{\varphi}}}^{\varphi}\frac{M-g(\varphi)}{F_*-F(\varphi)}\mathrm{d}\varphi>-\infty$。那末方程（1）的解均在未来存在且有界；从而，它至少存在一个以ω为周期的周期解。

在这里，所谓解终于有界是指当 t 充分大时轨线必整个位于相空间的一个有界区域内。所谓解在未来的性质是指对于大于某一有限t_0的任意 t 均成立的性质；于是，解在未来存在是指 $+\infty>t>t_0$ 解存在，解在未来有界是指 $+\infty>t>t_0$ 解有界。

下面，我们用到Massera推广Levinson的周期解存在定理[3或4]：设方程组

$$\dot{x}=f(t,x,y),\quad \dot{y}=g(t,x,y) \tag{*}$$

右端满足解的存在唯一性条件且是以ω为周期 t 的周期函数，如果所有解在未来存在且有一个在未来有界的解，那末它至少有一个以ω为周期的周期解。

由此，我们立即获得下述两个推论：

推论1. 如果方程组（*）的解终于有界，那末它至少存在一个以ω为周期的周期解。

推论2. 如果方程组（*）的解均在未来存在且有界，那末它至少存在一个以ω为周期的周期解。

§2　定理1 的证明

首先，引入新的未知函数$\psi=\psi(t)$化方程（1）为等价的方程组：

$$\dot{\varphi}=\psi-F(\varphi)+\int_0^t e(t)\mathrm{d}t,\qquad \dot{\psi}=-g(\varphi)。\tag{2}$$

记$F_1=F^*-M$，$F_2=F_*+M$。命$E_i(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}(\psi-F_i)^2+\int_0^{\varphi}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi$，$i=1, 2$

则 $$\left.\frac{\mathrm{d}E_i(\varphi,\psi)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=g(\varphi)\left[F_i-F(\varphi)+\int_0^t e(t)\mathrm{d}t\right],\quad i=1,2。$$

记$K=\frac{F_1-F_2}{\overline{\varphi}-\overline{\overline{\varphi}}}$，$F_0=\max\limits_{\overline{\overline{\varphi}}<\varphi<\overline{\varphi}}|F(\varphi)|$ 及$g_0=\max\limits_{\overline{\overline{\varphi}}<\varphi<\overline{\varphi}}|g(\varphi)|$。可以选取常数$\psi_0>F_0+M$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right|\leqslant\frac{g_0}{\psi-F_0-M}<K;\quad \overline{\overline{\varphi}}\leqslant\varphi\leqslant\overline{\varphi},\quad \psi>\psi_0$$

及

$$\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right|\leqslant\frac{g_0}{-\psi-F_0-M}<K,\quad \overline{\overline{\varphi}}\leqslant\varphi\leqslant\overline{\varphi},\quad \psi<-\psi_0。$$

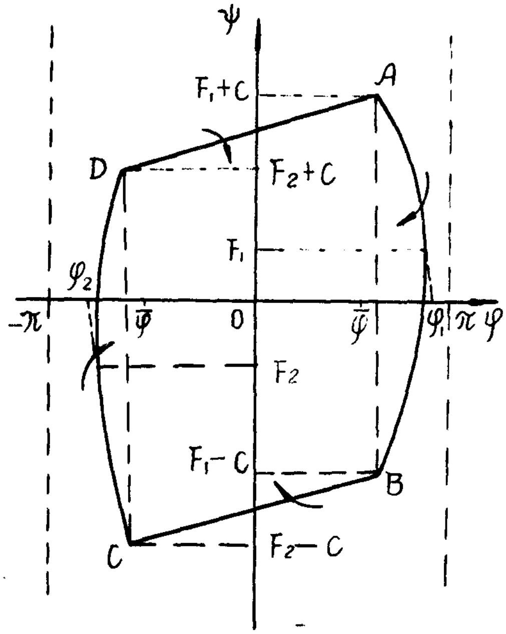
再记$c=\max\{\psi_0+F_1,\ \psi_0-F_2\}$。作 $\overset{\frown}{AB}$：$\varphi\geqslant\overline{\varphi}$，

$E_1(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}c^2+\int_0^{\overline{\varphi}}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi$；直线段BC：$\overline{\overline{\varphi}}\leqslant\varphi\leqslant\overline{\varphi}$，

$\psi=F_1-c+K(\varphi-\overline{\varphi})$；$\overset{\frown}{CD}$：$\varphi\leqslant\overline{\overline{\varphi}}$，

$E_2(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}c^2+\int_0^{\overline{\overline{\varphi}}}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi$；及直线段DA：$\overline{\overline{\varphi}}\leqslant\varphi\leqslant\overline{\varphi}$，

$\psi = F_2 + c + K(\varphi - \bar{\bar{\varphi}})$。



注意到：顶点A、B、C及D坐标分别为 $(\bar{\varphi}, F_1+c)$、$(\bar{\varphi}, F_1-c)$、$(\bar{\bar{\varphi}}, F_2-c)$ 及 $(\bar{\bar{\varphi}}, F_2+c)$，知它们构成首尾相接的封闭曲线。再注意到：在$\overset{\frown}{AB}$ 上，$\left.\frac{dE_1}{dt}\right|_{(2)}<0$；在$\overset{\frown}{CD}$上，$\left.\frac{dE_2}{dt}\right|_{(2)}<0$；在直线段BC与DA上均有 $\left|\frac{d\psi}{d\varphi}\right|<K$，又在BC上$\dot{\varphi}<0$，而在DA上$\dot{\varphi}>0$。故在封闭曲线ABCDA上每一点出发的轨线当 t 增加时均进入其内部。从而，方程（1）的解终于有界。事实上，封闭曲线ABCDA的最右点为 (φ_1, F_1)，其中φ_1由$\int_0^{\varphi_1} g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}c^2 + \int_0^{\bar{\varphi}} g(\varphi)d\varphi$，$\bar{\varphi}<\varphi_1<\pi$确定；最左点为$(\varphi_2, F_2)$，其中$\varphi_2$由$\int_0^{\varphi_2} g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}c^2 + \int_0^{\bar{\bar{\varphi}}} g(\varphi)d\varphi$，$-\pi<\varphi_2<\bar{\bar{\varphi}}$确定；最高点为 $(\bar{\varphi}, F_1+c)$ 及最低点为 $(\bar{\bar{\varphi}}, F_2-c)$。记$M_1 = \max\{\varphi_1, -\varphi_2\}$，$M_2 = \max\{F_1+c, c-F_2\}$ 及 $M_2' = M_2 + F_0 + M$，则当 t 充分大时，

$$|\varphi(t)|<M_1<\pi,\quad |\psi(t)|<M_2<+\infty \text{（或}|\dot{\varphi}(t)|<M_2'\text{）。}$$

最后，利用Massera定理推论1，立即推知：方程（1）至少存在一个以ω为周期的周期解。

§3 定理 I 的应用举例及注记

例 I. $$\ddot{\varphi} + \left(\frac{3}{2} + \sin\varphi + \cos 2\varphi\right)\dot{\varphi} + \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \cos t\text{。}$$

容易验证定理1条件均满足。此时，$M=1$，$F(\varphi) = 1 + \frac{3}{2}\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi$，可以取$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$，$\bar{\bar{\varphi}} = -\frac{\pi}{2}$，$F^* = 1 + \frac{3\pi}{4}$及$F_* = 1 - \frac{3\pi}{4}$。故按定理1知，它的解终于有界且至少存在一个以$2\pi$为周期的周期解。

附注 I. 此例$f(\varphi)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内不满足严格正的条件；事实上，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = -\frac{1}{2}<0$。

附注 2. 顺便指出，〔4〕中第Ⅶ章§8.1(a) 定理证明方法欠妥（p.418—419)，除非在较强的假设$\int_0^{+\infty}|p(\tau)|d\tau<+\infty$下方真。

附注3. 当$\lim\limits_{\varphi\to\pm\pi}\varphi F(\varphi)=+\infty$时，定理1中条件Ⅲ必成立。因此，对于调频输入正切锁相环路中，$f(\varphi)=a+\eta\sec^2\varphi$ （$a>0$，$\eta>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）对应的$F(\varphi)=a\varphi+\eta\mathrm{tg}\varphi$就是如此。

附注4. 一般，连续周期函数仅自身有界$|e(t)|<M$；但其积分$\int_0^t e(t)\mathrm{d}t$却未必一定有界。比如，$e(t)=1+\cos t$仍是2π为周期的周期连续函数，虽有$|e(t)|<2$，但当$t\to+\infty$时$\int_0^t(1+\cos t)\mathrm{d}t=t+\sin t\to+\infty$。这样，我们看到：定理1中条件Ⅰ是很苛刻的。下面定理2就是取消这一附加要求的一个结果。

§4 定理2的证明

现在，引入新的未知函数$\psi=\psi(t)$化方程（1）为等价的方程组：

$$\dot{\varphi}=\psi-F(\varphi),\qquad \dot{\psi}=e(t)-g(\varphi)\quad。\tag{3}$$

设L：$\varphi=\varphi(t)$，$\psi=\psi(t)$为（3）当$t=0$时过点（φ_0，ψ_0）的一条轨线，在$0<t<T$上确定。

引理1. 若定理2中条件Ⅰ成立，则当$\overline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)=+\infty$时必有$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)=-\pi$。

证. 若不然，即设$\overline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)=+\infty$，却有$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)>-\pi$；则存在$\varphi_*>-\pi$，使得恒有$\varphi(t)>\varphi_*$。记$F_0=\max\limits_{\varphi_*<\varphi<\overline{\varphi}}|F(\varphi)|$及$g_0=\max\limits_{\varphi_*<\varphi<\overline{\varphi}}|g(\varphi)|$。仿照定理1证明，可以选取常数$\overline{\psi}>\max(F_0,\psi_0)$，使得在$\varphi_*<\varphi<\overline{\varphi}$上当$\psi>\overline{\psi}$时$\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right|<\frac{M+g_0}{\overline{\psi}-F_0}=K$。作直线段$\psi=\overline{\psi}+K(\varphi-\varphi_*)$，$\varphi_*<\varphi<\overline{\varphi}$及水平直线段$\psi=\overline{\psi}+K(\overline{\varphi}-\varphi_*)$，$\overline{\varphi}<\varphi<\pi$，则这二直线段组成的折线上轨线只能自上方往下方跑，于是，L不可能穿越它使得$\overline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)=+\infty$，这就导致矛盾。

同理，可以证明

引理1′. 若$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)=-\infty$，则$\overline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)=+\pi$。

引理2. 若定理2的条件Ⅰ—Ⅲ成立，则当$\overline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)=-\pi$时，必有$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)=-\infty$。

证. 若不然，设$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)=-\pi$而$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\psi(t)>-\infty$，则存在常数$b>0$，使得恒有$\psi(t)>-b$。

若$\underline{\lim\limits_{\varphi\to-\pi}}F(\varphi)=-\infty$，则存在常数$\varphi_*>-\pi$，使得$F(\varphi_*)<-b$。再根据$F(\varphi)$的连续性，知存在$\delta$：$0<\delta<\min\{\pi-\varphi_*,\ \varphi_*+\pi\}$，使得只要$|\varphi-\varphi_*|<\delta$有$F(\varphi)<-b$；从而，$\dot{\varphi}=\psi-F(\varphi)>0$。因而L就不能越过带域$|\varphi-\varphi_*|<\delta$趋向$-\pi$，这与$\underline{\lim\limits_{t\to T}}\varphi(t)=-\pi$相悖。

若$\underline{\lim\limits_{\varphi\to-\pi}}F(\varphi)>-\infty$，则$F(\varphi)$下有界；再由条件Ⅲ当$\varphi<\overline{\overline{\varphi}}$时$F(\varphi)$上有界，推知：当$-\pi<\varphi<0$时，$|F(\varphi)|<F_1=\mathrm{const}$。结合条件Ⅱ更推得：$\lim\limits_{\varphi\to-\pi}\int_0^\varphi g(\varphi)\mathrm{d}\varphi=+\infty$。注意到只在曲线$\psi=F(\varphi)$下方$\varphi(t)$减少，因此，总可找到一段轨线使得$\varphi(t_1)<\overline{\overline{\varphi}}$，$\psi(t)<F(\varphi(t))$，

$t_1 < t < t_2$ 及 $\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} g(\varphi)\mathrm{d}\varphi > (b+F_1)^2 + M(\pi+\overline{\overline{\varphi}})$。

则在 $[t_1, t_2]$ 上 $\varphi(t)$ 单调减而 $\psi(t)$ 单调增。沿 L 从 t_1 到 t_2 积分得：

$$\psi(t_2) = \psi(t_1) + \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \frac{e(t) - g(\varphi)}{\psi - F(\varphi)} \mathrm{d}\varphi > -b + \int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_1)} \frac{-M - g(\varphi)}{F_1 + b} \mathrm{d}\varphi$$

$$= -b + \frac{M}{F_1+b}[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] + \frac{1}{F_1+b}\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} g(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$> -b + \frac{M}{F_1+b}(-\pi - \overline{\overline{\varphi}}) + \frac{1}{F_1+b}[(b+F_1)^2 + M(\pi+\overline{\overline{\varphi}})] = F_1 \geqslant F(\varphi(t_2))\ 。$$

这就与 t_2 原义相悖。

综合起来，欲 $\underline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) = -\pi$ 必 $\underline{\lim}_{t\to T}\psi(t) = -\infty$。

同理，可以证明：

引理2′．若 $\overline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) = +\pi$，则 $\overline{\lim}_{t\to T}\psi(t) = +\infty$。

引理 3．在定理 2 的条件 Ⅰ—Ⅳ下必有 $\underline{\lim}_{t\to T}\psi(t) > -\infty$。

证．若不然，设 $\underline{\lim}_{t\to T}\psi(t) = -\infty$。由引理1′知，$\overline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) = +\pi$；再由引理2′得，$\overline{\lim}_{t\to T}\psi(t) = +\infty$；再由引理 1 推得，$\underline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) = -\pi$。这样，在 $\varphi = \overline{\varphi}$ 上有 L 的点列 $(\varphi(t_n)$，$\psi(t_n))$，$\varphi(t_n) \equiv \overline{\varphi}$，当 $t \to T$ 时 $\psi(t_n)$ 单调减趋于 $-\infty$。于是，当 n 充分大时，L 上的点 $(\overline{\varphi}$，$\psi(t_n))$ 来自右上方 $\psi = F^*$ 上某点 $(\varphi(t')$，$\psi(t'))$，$(t_{n+1} < t' < t_n$，$\psi(t') = F^*)$，在这段轨线上 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 均严格单调降。由条件Ⅳ知，$\int_{\overline{\varphi}}^{\varphi} \frac{M + g(\varphi)}{F(\varphi) - F^*}\mathrm{d}\varphi < M_1 = \mathrm{coss}t$。$\overline{\varphi} < \varphi < \pi$。于是，$\psi(t_n) = \psi(t') + \int_{\varphi(t')}^{\varphi(t_n)} \frac{e(t) - g(\varphi)}{\psi - F(\varphi)} \mathrm{d}\varphi > F^* - \int_{\varphi(t_n)}^{\varphi(t')} \frac{M + g(\varphi)}{F(\varphi) - F^*}\mathrm{d}\varphi > F^* - M_1 > -\infty$，这就与 $\lim_{n\to+\infty}\psi(t_n) = -\infty$ 假设相脖。

同理，可以证明：

引理3′．在定理 2 的条件 Ⅰ—Ⅲ及Ⅳ′下必有 $\overline{\lim}_{t\to T}\psi(t) < +\infty$。

下面利用上述诸引理来完成定理 2 的证明。在条件 Ⅰ—Ⅳ下（条件Ⅳ换为Ⅳ′证明完全类似），由引理 3 知 $\underline{\lim}_{t\to T}\psi(t) > -\infty$；复由引理 2 得 $\underline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) > -\pi$；再由引理 1 推得 $\overline{\lim}_{t\to T}\psi(t) < +\infty$；最后由引理2′推得 $\overline{\lim}_{t\to T}\varphi(t) < +\pi$，故 L 有界。由于 L 的任意性，知(3)的一切解均在其存在区间内有界；不仅如此，一切解均在未来存在。若不然，则存在 L，相应的 $T < +\infty$；势必，当 $t \to T$ 时，L 趋于柱面边界（假设在柱面内解存在且唯一！），这就与 L 有界相冲突。故解均在未来存在且有界。剩下利用Massera定理推论 2 便证得周期为 ω 的周期解存在。

§ 5．定理 2 的应用举例及注记

例 2．$\ddot{\varphi}+\eta\sec^2\varphi\dot{\varphi}+\gamma\mathrm{tg}\varphi=e(t)$，　$(\eta,\ \gamma>0)$。

容易验证在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内定理 2 诸条件均满足。此时，$F(\varphi)=\eta\mathrm{tg}\varphi$。可以取 $\overline{\varphi}=\mathrm{arc\,tg}\frac{M}{\gamma}$，$\overline{\overline{\varphi}}=\overline{\varphi}$，$F^*=F_*=0$，

$$\overline{\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}}\int_{\overline{\varphi}}^{\varphi}\frac{M+g(\varphi)}{F(\varphi)}\mathrm{d}\varphi=\frac{\gamma\pi}{2\eta}-\frac{\gamma}{\eta}\mathrm{arctg}\frac{M}{\gamma}-\frac{M}{\eta}\ln\sin\mathrm{arc\,tg}\frac{M}{\gamma}<+\infty。$$

所以，根据定理 2 知：它的解均在未来存在且有界；从而，它至少存在一个周期为ω的周期解。

附注 1．可以取$e(t)=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t)$，其中$\beta_1$，$\beta_2$及$\Omega_M$均为常数。此即文〔2〕中列举的调频输入正切锁相环路方程情形。

附注 2．取$f(\varphi)=\eta\mathrm{tg}^2\varphi\sec^2\varphi$代之。同样容易验证定理 2 诸条件满足。此时，$f(\varphi)$ 仅是非负的並非严格正。

更取$f(\varphi)=\eta(\mathrm{tg}^2\varphi-1)\sec^2\varphi$代之。依旧可以验证定理 2 的条件满足。此时，$f(\varphi)$ 还是变号函数。

最后，让作者感谢俞玉森教授的热情帮助，特别是齐民友教授审阅手稿提出宝贵意见，也感谢钢研所领导的支持。

参 考 文 献

〔1〕王慕秋、张锦炎、王联，调频输入正切锁相环路方程及其推广，中国科学，2(1980)，99—108。

〔2〕王联、王慕秋，柱面上一类带有强迫项的二阶非线性方程的定性分析，数学学报，23∶5(1980)，763—772。

〔3〕Massera J.L., The existence of periodic solution of systems of differential equations, Dake Math.J., 17(1950), 457—475。

〔4〕Sansone G. & Conti R., Non-linear Differential Equations, p.369, Pergamon Press, Oxford, 1964。