一类重特征方程非齐次 Goursat 问题解的存在性*

陆柱家

（中国科学院　数学研究所）

本文讨论下述非齐次 Goursat 问题

$$\begin{cases} L_{b,k}u \equiv u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + bx^{k-1}u_t = f(x,t), \qquad t > \dfrac{x^{k+1}}{k+1}, \\ u\left(x, \dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (G_{b,k})$$

在原点的邻域中解析解的存在性，其中，$k \geqslant 1$ 是整数，$\varphi(x)$，$f(x,t)$ 分别是原点在 $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$ 的一邻域中的解析函数．

§0　引　言

继F．Treves[1]讨论了算子 $L_{b,1}$ 的 Cauchy 问题的唯一性中的离散现象之后，不少作者相继研究了与此算子有关的算子的唯一性和存在性中的离散现象．例如，王光寅等在高维空间中讨论了具有重特征的方程的 Cauchy 问题的唯一性[2, 3]，以及对于一般的两个变量的具有类似于 $L_{b,1}$ 的两族特征的算子的 Cauchy 问题的唯一性[4]，还讨论了算子 $L_{b,1}$ 的 Cauchy 问题和 Goursat 问题的光滑解的存在性问题[5]．A. Menikoff[6, 定理4.1, 4.2]证明了在上半空间中 $L_{b,k}$（$k \geqslant 1$ 为奇整数）的以 $t=0$ 为支柱的 Cauchy 问题在适当光滑的函数类中解有唯一性的充要条件为

$$b \neq (2n+1)(k+1) \pm 1, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

作者[7]讨论了下述以特征线为支柱的齐次 Goursat 问题

$$\begin{cases} u_{xx} - x^2 u_{tt} + a u_x + b u_t + c u = 0, \qquad t > \dfrac{x^2}{2}, \\ u\left(x, \dfrac{x^2}{2}\right) = \psi(x) \end{cases}$$

的解的存在性和唯一性，在解析函数类中给出了此问题的完全的研究。本文则在解析函数类中讨论算子 $L_{b,k}$（$k \geqslant 1$ 为整数）的非齐次 Goursat 问题（$G_{b,k}$）的解的存在性和唯一性，揭示了此问题本质上仍依赖于 b 的取值。然而，当 $k > 1$ 时，与〔7〕不同，即使当 b 不取某些特殊的离散值时，要解析解存在，仍需在 φ 和 f 之间满足某些相容性条件。

本文中，我们总假定 φ 和 f 是其变元在原点一邻域中的解析函数．

§1　主　要　结　果

因为在解析函数类中讨论问题，因此不妨设

$$f(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j} \frac{x^i t^j}{i!\,j!}, \qquad \varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \frac{x^i}{i!} .$$

* 1982年5月18日收到．

并令$B_i=(b-2i-2+k)\prod_{l=i-k+2}^{i} l$．

定理Ⅰ． 设$b\neq(2n+1)(k+1)\pm1$，$n=0,1,2,\cdots$．则1) $k=1$ 的情形．对任何解析的φ，f，$(G_{b,1})$ 恒有唯一的解析解．

2) $k>1$ 的情形．

a) 当$b\neq 2i+2-k$（$i=k-1,k,k+1,\cdots$）时，问题 $(G_{b,k})$ 存在解析解的充要条件为

$$\varphi_{n(k+1)+a+2}=\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{l=1}^{q+1}(-1)^{l+1}\frac{[(n-l+1)(k+1)+a]!}{[(n-q)(k+1)+a]!\ (q-l+1)!\ (k+1)^{q-l+1}}\times\right.$$

$$\left.\prod_{m=1}^{l-1}B_{(n-m+1)(k+1)+a}\right)f_{(n-q)(k+1)+a,q},\qquad (C_1)_k$$

其中，$a=0,1,\cdots,k-2$；$n=0,1,2,\cdots$．且当此条件成立时，解析解是唯一的．

b) 当$b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+\alpha$，$0<\alpha<k-2$，$I\in Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$ 时，$(G_{b,k})$ 存在解析解，当且仅当下两条件成立：

$$\begin{cases}(C_1)_k,\ 其中a=0,\cdots,\alpha-1,\alpha+1,\cdots,k-2;\ n=0,1,2,\cdots,\ 以及\ a=\alpha,\ n<I\ (若I\geqslant1),\\[2ex] \varphi_{n(k+1)+\alpha+2}=\displaystyle\sum_{q=0}^{n-I-1}\left(\sum_{l=1}^{q+1}(-1)^{l+1}\frac{[(n-l+1)(k+1)+\alpha]!}{[(n-q)(k+1)+\alpha]!\ (q-l+1)!\ (k+1)^{q-l+1}}\times\right.\\ \qquad\left.\times\displaystyle\prod_{m=1}^{l-1}B_{(n-m+1)(k+1)+\alpha}\right)f_{(n-q)(k+1)+\alpha,q}+\\ \qquad+\displaystyle\sum_{q=n-I}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n-I+1}(-1)^{l+1}\frac{[(n-l+1)(k+1)+\alpha]!}{[(n-q)(k+1)+\alpha]!\,(q-l+1)!\ (k+1)^{q-l+1}}\times\right.\\ \qquad\left.\times\displaystyle\prod_{m=1}^{l-1}B_{(n-m+1)(k+1)+\alpha}\right)f_{(n-q)(k+1)+\alpha,q},\quad n\geqslant I.\qquad (C_2)_k\end{cases}$$

当此两条件成立时，解析解是唯一的．

定理Ⅱ． 设$b=(2I+1)(k+1)+1$ 或 $b=((2I+1)(k+1))-1$，其中$I\in Z_+$，即$b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+\alpha$，$I\in Z_+$，$\alpha\in\{k-1,k\}$．则 $(G_{b,k})$ 存在解析解，等价于下两条件：

$$\begin{cases}(C_1)_k,\ 其中\ a=0,1,\cdots,k-2;\ n=0,1,2,\cdots.\ (k=1\ 时无此条件.)\\ (C_2)_k.\end{cases}$$

当此两条件成立时，$(G_{b,k})$ 有无穷多个解析解．

注Ⅰ． 在定理Ⅰ，Ⅱ的叙述中及下文中，我们作如下约定：

$$\sum_{l=M}^{M+N}A_l=\begin{cases}A_M+A_{M+1}+\cdots+A_{M+N}, & N\geqslant0,\\ 0, & N<0,\end{cases}$$

$$\prod_{l=M}^{M+N}A_l=\begin{cases}A_MA_{M+1}\cdots A_{M+N}, & N\geqslant0,\\ 1, & N<0.\end{cases}$$

例如，在 $(C_1)_k$和 $(C_2)_k$ 中，当 $l=1$ 时，$\prod_{m=1}^{l-1}B_{(n-m+1)(k+1)+a}=1$；再如，在下文中，当 $n=0$ 时，$(\mathscr{C}_1)_k$实为 $F_{a,0}=0$．

注 2．由定理Ⅰ的1)及 $k=1$ 时的定理Ⅱ，令 $f(x,t)\equiv 0$，即可得〔7〕中的定理Ⅲ．

注 3．在某种意义下，定理Ⅰ，Ⅱ与〔6〕中的定理4.1，4.2 是相符的，即问题$(G_{b,k})$的解是否具有唯一性是由 b 是否不等于 $(2n+1)(k+1)\pm 1$ $(n\in Z_+)$所决定的．

为了证明定理Ⅰ，Ⅱ，我们先作未知函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)-\varphi(x).$$

这样，$(G_{b,k})$等价于带有齐次条件的 Goursat 问题

$$L_{b,k}V=f(x,t)-\varphi_{xx}(x),\quad t>\frac{x^{k+1}}{k+1};\qquad v(x,\frac{x^{k+1}}{k+1})=0.$$

若再作自变量的解析变换

$$\xi=x,\quad \eta=t-\frac{x^{k+1}}{k+1},\tag{T}$$

并记$U(\xi,\eta)=v(\xi,\eta+\frac{\xi^{k+1}}{k+1})$，$F(\xi,\eta)=f(\xi,\eta+\frac{\xi^{k+1}}{k+1})-\varphi_{\xi\xi}(\xi)$，且用 $\mathscr{L}_{b,k}$表示$L_{b,k}$在$\xi-\eta$ 坐标中的表示，则有

$$\mathscr{L}_{b,k}U\equiv U_{\xi\xi}-2\xi^kU_{\xi\eta}+(b-k)\xi^{k-1}U_\eta=F(\xi,\eta),\quad \eta>0,\ U(\xi,0)=0.\tag{$\mathscr{C}_{b,k}$}$$

若令

$$U(\xi,\eta)=\sum_{i,j=0}^{\infty}U_{i,j}\frac{\xi^i\eta^j}{i!\,j!},\quad u(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\infty}u_{i,j}\frac{x^it^j}{i!\,j!},\quad F(\xi,\eta)=\sum_{i,j=0}^{\infty}F_{i,j}\frac{\xi^i\eta^j}{i!\,j!},\tag{1}$$

则容易得到（若各函数均解析）

$$\begin{cases}F_{i,j}=\displaystyle\sum_{l=0}^{[\frac{i}{k+1}]}\frac{i!}{[i-l(k+1)]!\,l!\,(k+1)^l}f_{i-l(k+1),j+l},\quad i=0,1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,\\ F_{i,0}=\displaystyle\sum_{l=0}^{[\frac{i}{k+1}]}\frac{i!}{[i-l(k+1)]!\,l!\,(k+1)^l}f_{i-l(k+1),l}-\varphi_{i+2},\quad i=0,1,2,\cdots,\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}U_{i,j}=\displaystyle\sum_{l=0}^{[\frac{i}{k+1}]}\frac{i!}{[i-l(k+1)]!\,l!\,(k+1)^l}u_{i-l(k+1),j+l},\quad i=0,1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,\\ U_{i,0}=\displaystyle\sum_{l=0}^{[\frac{i}{k+1}]}\frac{i!}{[i-l(k+1)]!\,l!\,(k+1)^l}u_{i-l(k+1),l}-\varphi_i,\quad i=0,1,2,\cdots,\end{cases}\tag{3}$$

其中，求和记号中的$[\frac{i}{k+1}]$表示$\frac{i}{k+1}$的整数部分．

显然，定理Ⅰ，Ⅱ的所有结论等价于在$\xi-\eta$ 坐标中的相应结论，即下述

定理Ⅰ′．设$b\neq(2n+1)(k+1)\pm 1$，$n=0,1,2,\cdots$．则

1)$k=1$ 的情形．对任何解析的F，（$\mathscr{G}_{b,1}$）恒有唯一的解析解．

2)$k>1$ 的情形．

a)当$b\neq 2i+2-k$（$i=k-1,k,k+1,\cdots$）时，问题（$\mathscr{G}_{b,k}$）存在解析解的充要条件为

$$F_{a,n}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{n+1}F_{(n-l+1)(k+1)+a,l-1}\Big/\prod_{m=l}^{n}\mathrm{B}_{(n-m+1)(k+1)+a}, \qquad (\mathscr{G}_1)_k$$

其中$a=0,1,\cdots,k-2$；$n=0,1,2,\cdots$．当此条件成立时，解析解是唯一的．

b)当$b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+a$，$0\leqslant a\leqslant k-2$，$I\in\mathbf{Z}_+$时，（$\mathscr{G}_{b,k}$）存在解析解，当且仅当下两条件成立：

$$\begin{cases}(\mathscr{G}_1)_k, \text{ 其中} a=0,1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,k-2;\ n=0,1,2,\cdots,\text{ 及} a=a,\ n<I\ (\text{若} I\geqslant 1),\\ F_{I(k+1)+a,\,n-I}=\sum\limits_{l=1}^{n-I}(-1)^{n-I+1}F_{(n-l+1)(k+1)+a,\,l-1}\Big/\prod\limits_{m=l}^{n-I}\mathrm{B}_{(n-m+1)(k+1)+a},\\ \qquad n\geqslant I. \qquad (\ \ _2)_k\end{cases}$$

当此两条件成立时，解析解是唯一的．

定理Ⅱ′．设$b=(2I+1)(k+1)+1$ 或$b=(2I+1)(k+1)-1$，其中$I\in\mathbf{Z}_+$，即$b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+a$，其中$I\in\mathbf{Z}_+$，$a\in\{k-1,k\}$．则问题（$\mathscr{G}_{b,k}$）存在解析解，等价于下两条件：

$$\begin{cases}(\mathscr{G}_1)_k, \text{其中} a=0,1,\cdots,k-2;\ n=0,1,2,\cdots\ (k=1 \text{ 时无此条件})．\\ (\mathscr{G}_2)_k．\end{cases}$$

此两条件成立时，（$\mathscr{G}_{b,k}$）有无穷多个解析解．

注4．由关系式（2）不难验证，定理Ⅰ′，Ⅱ′中的所有条件在$x-t$坐标中即为定理Ⅰ，Ⅱ中相应的条件．

§2 定 理 的 证 明

由§1的推导及注4可知,为了证明定理Ⅰ，Ⅱ，我们只需证明定理Ⅰ′，Ⅱ′．

定理Ⅰ′的证明．2)设（$\mathscr{G}_{b,k}$）存在解析解$U(\xi,\eta)$，它由（1）表示．则由（$\mathscr{G}_{b,k}$），我们有

$$\begin{cases}U_{i+2,j}+B_iU_{i-k+1,j+1}=F_{i,j}, \quad i,j=0,1,2,\cdots, & (4)\\ U_{i,0}=0,\quad i=0,1,2,\cdots, & (5)\end{cases}$$

其中，我们作下述约定

$$U_{i,j}=0,\quad j=0,1,2,\cdots,\qquad \text{当} i<0 \text{时}． \qquad (6)$$

对于任意的b，令$(i,j)=(a,0)$，$0\leqslant a\leqslant k-2$，由（4）-（6）得$F_{a,0}=0$，即（$\mathscr{G}_1$）$_k$必须对于$a=0,1,\cdots,k-2$；$n=0$成立．因此以后可假定$n\geqslant 1$．

a)设$b\neq 2i+2-k$，$\quad i=k-1,k,k+1,\cdots$． （7）

对于任意的$n\geqslant 1$，$a\in\{0,1,\cdots,k-2\}$，令(i,j)分别等于$(n(k+1)+a,0)$，$(n-1)(k+1)$

$+a,1),\cdots,(a,n)$，则从（4）－（6）得到下述线性方程组

$$\begin{cases} B_{n(k+1)+a}U_{(n-1)(k+1)+a+2,1} = F_{n(k+1)+a,0} \\ U_{(n-1)(k+1)+a+2,1}+B_{(n-1)(k+1)+a}U_{(n-2)(k+1)+a+2,2} = F_{(n-1)(k+1)+a,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{(k+1)+a+2,n-1}B_{(k+1)+a}+U_{a+2,n} = F_{(k+1)+a,n-1} \\ U_{a+2,n} = F_{a,n} \end{cases} \qquad (8)_{k,a}$$

这是一个 $n+1$ 个方程，n 个未知数的方程组．由（7），从前 n 个方程容易唯一确定 $U_{(n-j)(k+1)+a+2,j}$，$j=1,2,\cdots,n$．

$$U_{(n-j)(k+1)+a+2,j}=\sum_{l=1}^{j}(-1)^{j+k}F_{(n-l+1)(k+1)+a,l-1}\Big/\prod_{m=l}^{j}B_{(n-m+1)(k+1)+a},$$

$$n=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,n. \qquad (9)_{k,a}$$

在 $(9)_{k,a}$ 中令 $j=n$，由 $(8)_{k,a}$ 的第 $n+1$ 个方程即得 $(\mathscr{G}_1)_k$ 对于 $a=0,1,\cdots,k-2$；$n=1,2,\cdots$ 成立．

$b)$ 设 $b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+a$，$0\leqslant a\leqslant k-2$，$I\in\mathbf{Z}_+$． (10)

如 $a)$ 中一样，对于 $a=0,1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,k-2$；$n=0,1,2,\cdots$，$(\mathscr{G}_1)_k$ 成立（并且，$(9)_{k,a}$ 成立（自然，其中 $n>0$））．

当 $I\geqslant1$，$a=a$，$n<I$，$n\neq0$ 时，因为 $(8)_{k,a}$ 中所出现的系数皆不为零，所以 $(\mathscr{G}_1)_k$ 亦成立（因而 $(9)_{k,a}$（$n>0$）成立）．

现设 $n>I$，$a=a$．在 $(8)_{k,a}$ 中，第 $n-I+1$ 个方程为

$$U_{I(k+1)+a+2,n-I}+B_{I(k+1)+a}U_{(I-1)(k+1)+a+2,n-I+1}=F_{I(k+1)+a,n-I}, \qquad (11)$$

其中，由（10），$B_{I(k+1)+a}=0$．由 $(8)_{k,a}$ 的前 $n-I$ 个方程可（唯一地）得 $(9)_{k,a}$（其中 $j=1,2,\cdots,n-I$）．在 $(9)_{k,a}$ 中令 $j=n-I$，由(11) 即得 $(\mathscr{G}_2)_k$ 对于 $n>I$，$a=a$ 成立．

当 $n=I$，$a=a$ 时，由 $(8)_{k,a}$ 的第一个方程即得 $F_{I(k+1)+a,0}=0$．因此 $(\mathscr{G}_2)_k$ 对于 $n=I$，$a=a$ 亦成立．由此得到定理的必要性部分．

顺便指出，当 $n\geqslant I>1$ 时，由 $(8)_{k,a}$ 的后 I 个方程唯一地得到

$$U_{(n-j)(k+1)+a+2,j}=\sum_{l=1}^{n-j+1}(-1)^{n-j+l+1}\Big(\prod_{m=l+1}^{n-j+1}B_{(m-1)(k+1)+a}\Big)f_{(l-1)(k+1)+a,n-l+1},$$

$$j=n-I+1,\ n-I+2,\cdots,n. \qquad (12)_{k,a}$$

唯一性．设

$$b\neq(2n+1)(k+1)\pm1,\quad n=0,1,2,\cdots. \qquad (13)_k$$

对于任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$，$a\in\{k-1,k\}$，令 (i,j) 分别等于 $(n(k+1)+a,0)$，$((n-1)(k+1)+a,1),\cdots,(a,n)$，则从（4）－（6）得到

$$\begin{cases} B_{n(k+1)+\alpha} U_{n(k+1)+\beta,1} & = F_{n(k+1)+\alpha,0}, \\ U_{n(k+1)+\beta,1}+B_{(n-1)(k+1)+\alpha} U_{(n-1)(k+1)+\beta,2} & = F_{(n-1)(k+1)+\alpha,1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad (14)_{k,\alpha} \\ U_{2(k+1)+\beta,n-1}+B_{(k+1)+\alpha} U_{(k+1)+\beta,n} & = F_{(k+1)+\alpha,n-1}, \\ U_{(k+1)+\beta,n}+B_{\alpha} U_{\beta,n+1} & = F_{\alpha,n}, \end{cases}$$

其中 $\beta=(\alpha+2)-(k+1)\in\{0,1\}$. 这是一个 $n+1$ 个方程，$n+1$ 个未知数的线性方程组，由（13），它的系数都不等于零，所以可唯一得到

$$U_{(n-j+1)(k+1)+\beta,j}=\sum_{l=1}^{j}(-1)^{j+l}F_{(n-l+1)(k+1)+\alpha,l-1}\Big/\prod_{m=l}^{j}B_{(n-m+1)(k+1)+\alpha},$$

$$n=0,1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,\ n+1 \qquad (15)_{k,\alpha}$$

在 $k=1$ 的情形，表达式 $(15)_{k,\alpha}$ ($n=0,1,2,\cdots$; $j=1,2,\cdots$, $n+1$; $\alpha=0,1$) 即包含了所有的 $U_{i,j}(i\geqslant0,\ j\geqslant1$；注意，由（5），$U_{i,0}=0$，$i\geqslant0$)。因此对于任何解析的 F，若 $(\mathscr{G}_{b,1})$ 有解析解，则解析解是唯一的．解析解系数的表达式即为 $(15)_{1,\alpha}$ $(\alpha=0,1)$ 和（5）．

$k>1$ 的情形．当条件（7）成立时，在"相容性"条件 $(\mathscr{G}_1)_k$（其中 $\alpha=0,1,\cdots,k-2$; $n=0,1,2,\cdots$,）下，由（5），$(15)_{k,\alpha}$ $(\alpha=k-1,k)$ 及必要性论证中唯一得到的表达式 $(9)_{k,\alpha}$ $(n\geqslant1$；$j=1,2,\cdots,n$; $\alpha=0,1,\cdots,k-2)$ 知 $(\mathscr{G}_{b,k})$ 的唯一性成立．当条件（10）成立时，在"相容性"条件 $(\mathscr{G}_1)_k$（其中 $n\geqslant1$, $\alpha=0,1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,k-2$；以及 $\alpha=a$, $n<I$——若 $I\geqslant1$）和 $(\mathscr{G}_2)_k$ 下，由（5），$(15)_{k,\alpha}$ $(\alpha=k-1,k)$ 以及前面所唯一得到的表达式 $(9)_{k,\alpha}$（其中 $\alpha=0,1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,k-2$; $n=1,2,\cdots$; $j=1,2,\cdots,n$，以及 $I\geqslant1$ 时 $\alpha=a$, $n<I$ $(n\neq0)$, $j=1,2,\cdots,n$ 和 $n\geqslant I$, $\alpha=a$, $j=1,2,\cdots,n-I$）和 $(12)_{k,\alpha}$（其中 $n\geqslant I$, $j=n-I+1,\ n-I+2,\cdots,n$）知所有的 $U_{i,j}(i,j\geqslant0)$ 均被唯一确定，因而解析解必是唯一的．

充分性．由著名的 Cauchy-kovalevska 定理我们知道，若 $U_0(\eta)$, $U_1(\eta)$ 在 $\eta=0$ 的一邻域中解析，则 Cauchy 问题

$$\mathscr{L}_{b,k}U=F(\xi,\eta),\quad U(0,\eta)=U_0(\eta),\quad U_\xi(0,\eta)=U_1(\eta) \qquad (C)$$

在原点的一邻域中存在唯一的解析解．因此我们只需证明，在相应的"相容性"条件下，若形式地记

$$U_0(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}U_{0,j}\frac{\eta^j}{j!},\qquad U_1(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}U_{1,j}\frac{\eta^j}{j!}, \qquad (16)$$

其中 $U_{0,j}, U_{1,j}$ $(j\geqslant0)$ 由表达式（5），$(15)_{k,\alpha}$ $(\alpha=k-1,\ k,\ n\geqslant0,\ j=n+1)$ 表示，则此两幂级数在 $\eta=0$ 的一邻域中收敛，且（C）的唯一解析解 $U(\xi,\eta)$ 满足

$$U(\xi,0)\equiv0. \qquad (17)$$

不难验证（17），因此只需证明级数（16）收敛即可．

由 $(15)_{k,\alpha}$ 得到

$$U_{\beta, n+1}=\sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{n+1+l}F_{(n-l+1)(k+1)+a,\ l-1}\Big/\prod_{m=l}^{n+1}B_{(n-m+1)(k+1)+a},$$

$$n=0,1,2,\cdots, \tag{18}$$

其中$a\in\{k-1,k\}$，$\beta=(a+2)-(k+1)\in\{0,1\}$．不妨设

$$|F_{i,j}|\leqslant i!j!\frac{F}{R^{i+j}}, \qquad i,j\geqslant 0, \tag{19}$$

其中F，$R>0$为常数．我们要证，存在正常数U，R_1，使得

$$|U_{\beta,n+1}|\leqslant(n+1)!\ \frac{U}{R_1^{n+1+\beta}},\ n=0,1,2,\cdots. \tag{20}$$

显然，只需对于充分大的n证明（20）即可．容易知道，

$$\Big|\prod_{m=l}^{n+1}B_{(n-m+1)(k+1)+a}\Big|=|B_aB_{(k+1)+a}\cdots B_{(n-l+1)(k+1)+a}|$$

$$=\frac{((n-l+1)(k+1)+a)!}{\prod\limits_{m=l}^{n-l}(m(k+1)+a+1)(m(k+1)+a+2)}\Big|\prod_{m=0}^{n-l+1}(b-2m(k+1)-2a-2+k)\Big|$$

$$\geqslant\frac{((n-l+1)(k+1)+a)!}{((n-l+2)!)^2(k+1)^{2(n-l+1)}}b_k\,[(2(k+1))(4(k+1))\cdots$$

$$(2[\frac{n-l}{2}](k+1))]^2 \qquad (若\ 1<l<n-2)$$

$$\geqslant\frac{b_k2^{n-l-1}((n-l+1)(k+1)+a)!\ ([\frac{n-l}{2}]!)^2}{((n-l+2)!)^2(k+1)^{n-l+3}}$$

其中$b_k=\min\limits_{\substack{m=0,1,2,\cdots\\ a=k-1,k}}|b-2m(k+1)-2a-2+k|>0$．因此，对于$1<l<n-2$，有

$$\Big|F_{(n-l+1)(k+1)+a,l-1}\Big/\prod_{m=1}^{n+1}B_{(n-m+1)(k+1)+a}\Big|$$

$$<\frac{F((n-l+1)(k+1)+a)!(l-1)!}{R^{(n-l+1)(k+1)+a+l-1}}\cdot$$

$$\times\frac{((n-l+2)!)^2(k+1)^{n-l+3}}{b_k((n-l+1)(k+1)+a)!2^{n-l-1}([\frac{n-l}{2}]!)^2}$$

$$=\frac{F(k+1)^{n-l+3}}{b_k2^{n-l-1}}\cdot\frac{((n-l+2)!)^2(l-1)!}{(n+1)!([\frac{n-l}{2}]!)^2}(n+1)!\frac{1}{R^{(n-l+1)(k+1)+a+l-1}}$$

$$\leqslant \frac{F(k+1)^{n-l+3}}{b_k 2^{n-l-1}} \cdot \frac{(n-l+2)!}{(n+1)([\frac{n-l}{2}]!)^2} \cdot \frac{(n+1)!}{R^{(n-l+1)(k+1)+a+l-1}} \quad (\text{若} l \geqslant 2)$$

$$\leqslant \frac{F(k+1)^{n-l+3}}{b_k 2^{n-l-1}} \cdot \frac{2^{n-l-1}(n-l+2)^3}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{R^{(n-l+1)(k+1)+a+l-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \frac{F}{b_k} \cdot \frac{(k+1)^{n-l+3} c 2^{n-l+2} (n+1)!}{R^{(n-l+1)(k+1)+a+l-1}}$$ （其中 $c>1$ 为一常数，适合

$p^4 \leqslant c \cdot 2^p$, $p=1, 2, \cdots$ ）

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \frac{FC(k+1)}{b_k} \quad (n+1)!/(R^{k+1}/2(k+1))^{n+1+\beta}$$ （不妨设 $0<R<1$ ）

不难验证，对于 $l=1$，$n-1$，$n, n+1$，上述不等式亦成的。因此（20）得证，其中

$$U=\frac{FC(k+1)}{b_k}, \qquad R_1=\frac{R^{k+1}}{2(k+1)} \quad . \tag{21}$$

证毕.

定理 Ⅱ′ 的证明.

设: $b=2i+2-k$，$i=I(k+1)+a$，其中 $I \in Z_+$，$a \in \{k-1, k\}$. （22）

必要性. 对于任何 $n \geqslant 0$，，$a=0, 1, \cdots$，$k-2$，与定理 Ⅰ′ 证明中一样，可知条件 $(\mathscr{G}_1)_k$ 对于 n，a 的这类取值成立的必要性（$k=1$ 时无方程组（8）$_{k,a}$，故不需条件 $(\mathscr{G}_1)_k$）.

我们同样可得方程组 $(14)_{k,a}$（由 $(14)_{k,a}$，当 $n<I$（若 $I \geqslant 1$）时，可唯一地得到由 $(15)_{k,a}$（$j=1, 2, \cdots$，$n+1$）表示的 $U_{(n-j+1)(k+1)+\beta, j}$，这里 $\beta=(a+2)-(k+1)$）.

当 $n \geqslant I$ 时，其中第 $n-I+1$ 个方程为

$$U_{(I+1)(k+1)+\beta, n-I}+B_{I(k+1)+a} U_{I(k+1)+\beta, n-I+1}=F_{I(k+1)+a, n-I} \, . \tag{23}$$

注意，其中的系数 $B_{I(k+1)+a}=0$. 从 $(14)_{k,a}$ 的前 $n-I$ 个方程可得（当 $n-I>0$ 时）当 $j=1, 2, \cdots$，$n-I$ 时的 $(15)_{k,a}$，与（23）比较即得 $(\mathscr{G}_2)_k$ 对于 $n>I$ 成立. 当 $n=I$ 时，因为 $U_{i,0}=0$，$i \geqslant 0$，故（23）即为 $F_{I(k+1)+a, 0}=0$，此即为 $n=I$ 时的 $(\mathscr{G}_2)_k$.

充分性和非唯一性. 我们只需考虑 $n \geqslant I$ 的情形. 当 $I=0$ 时，由 $(14)_{k,a}$ 的最后一个方程可知 $U_{\beta, n+1}$（$n=0, 1, \cdots$）可任意选取. 当 $I>0$ 时，$(14)_{k,a}$ 的最后 I 个方程有 $I+1$ 个变量，且其系数矩阵的秩为 I，因此其中必有且只有一个变量是独立的，我们可以将其取为 $U_{\beta, n+1}$，则得

$$U_{(n-j+1)(k+1)+\beta, j}=\sum_{l=2}^{n-j+1}(-1)^{n-j+l+1}\left(\prod_{m=l}^{n-j} B_{m(k+1)+a}\right) F_{(l-1)(k+1)+a, n-l+1}$$

$$+(-1)^{n-j}\left(\prod_{m=1}^{n-j}B_{m(k+1)+\alpha}\right)\left(F_{\alpha,n}-B_{\alpha}U_{\beta,n+1}\right),\quad j=n-I+1,n-I+2,\cdots,n. \tag{24}$$

总之，对于$I\geqslant 0$，我们可任意选取 $U_{\beta,n+1}(n=I,I+1,\cdots)$.

对于$\alpha'\in\{k-1,k\}$，$\alpha'\neq\alpha$，令$\beta'=(\alpha'+2)-(k+1)$，则$\beta'\in\{0,1\}$，$\beta'\neq\beta$．由于(22)，由方程组$(14)_{k,\alpha'}$（其中β改为β'）可唯一确定 $U_{(n-j+1)(k+1)+\beta',j}$ ($n\geqslant 0$, $j=1,2,\cdots,n+1$)，它们由公式$(15)_{k,\alpha'}$（β改为β'）表示．

在本定理的相容性条件下，令 $U_{\beta',n+1}(n\geqslant 0)$，$U_{\beta,n+1}$ ($n=0,1,\cdots,I-1$，若$I\geqslant 1$)分别由表达式$(15)_{k,\alpha'}$，$(15)_{k,\alpha}$表示，$U_{\beta,0}=U_{\beta',0}=0$，并任取 $U_{\beta,n+1}(n\geqslant I)$，则不难验证问题（C）（其中$U_0(\eta),U_1(\eta)$由（16）表示）的唯一形式幂级数解$U(\xi,\eta)$满足$U_{i,0}=0(i\geqslant 0)$，即$U(\xi,0)\equiv 0$．故只需验证如此决定的级数

$\sum_{n=0}^{\infty}U_{\beta,n+1}\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!}$，$\sum_{n=0}^{\infty}U_{\beta',n+1}\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!}$收敛即可．后者的收敛如同定理Ⅰ′证明中的一样．而前者，因为$U_{\beta,n+1}$（$n\geqslant I$）是任意的，故任何使得$\sum_{n=0}^{\infty}U_{\beta,n+1}\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!}$收敛的序列$\{U_{\beta,n+1}\mid n=I, I+1,\cdots\}$都确定（C）的一个解析解，因而也确定（$\mathscr{G}_{b,k}$）的一个解析解．显然，在本定理的条件下解析解有无穷多个．证毕．

注 5．由定理Ⅰ′，Ⅱ′的证明可看出，虽然在定理Ⅰ′的2)，b)的条件下，方程组$(8)_{k,\alpha}$中的系数$B_{I(k+1)+\alpha}=0$（$n\geqslant I$时），但在"相容性"条件$(\mathscr{G}_1)_k$下，此方程组有唯一解，因而导致问题（$\mathscr{G}_{b,k}$）有唯一解．而在定理Ⅱ′的条件下，方程组$(14)_{k,\alpha}$中亦有系数$B_{I(k+1)+\alpha}=0$（$n\geqslant I$时），但此时方程组$(14)_{k,\alpha}$，因而问题（$\mathscr{G}_{b,k}$）的解是不唯一的．正如注3所述，在唯一性成立的判定上，这是与〔6〕一致的。但与〔6〕不一样，本文中$k\geqslant 1$不限于为奇数．

参 考 文 献

〔1〕Treves, F., Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 46 (1974), 229—233.

〔2〕Lu Zhujia, Mai Mingcheng and Wang Guangyin, Discrete phenonomena in the uniqueness of the (Cauchy problem in multiple independent variables, *Scientia Sinica*, 23 (1980), 690—699.

〔3〕——, 关于始值问题的离散现象，《科学通报》，23 (1978)，279—282．

〔4〕——, 关于非主型偏微分方程的唯一性的一点注记，《数学学报》，22 (1979)，713—718．

〔5〕——, Discrete phenomena in existence in the initial value problems, *Scientia Sinica*, 22 (1979), 1229—1237.

〔6〕Menikoff, A., Uniqueness of the Cauchy problem for a class of partial differential equations with double characteristics, *Indiana Univ. Math. J.*, 25 (1976), 1—23.

〔7〕Lu Zhujia, Discrete phenomena in Existence in the Goursat Problem of Equation with Double Characteristics, *Scientia Sinica*, ser. A, 6 (1983), 595—606.

Existence of Solutions of the non-Homogeneous Goursat Problem for a Class of Partial Differential Equations with Double Characteristics

Lu Zhujia

(Academia Sinica, Institute of Mathematics)

Abstract

The existence of analytic solutions in neighborhood of the origin for non-homogeneous Goursat problem

$$\begin{cases} L_{b,k}u \equiv u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + bx^{k+1}u_t = f(x,t), & t > \dfrac{x^{k+1}}{k+1}, \\ u\left(x, \dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (G_{b,k})$$

is discussed in this paper, where $k \geqslant 1$ be an integer, and $\varphi(x)$, $f(x,t)$ analytic functions in a neighborhood of the origin in $\mathbf{R}'$, $\mathbf{R}^2$, respectively. The following results are proved:

(Ⅰ) When $b = (2n+1)(k+1) \pm 1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, and if analytic solutions exist for Problem $(G_{b,k})$, they must be unique. Furthermore,

(1) if $k = 1$, $(G_{b,k})$ always has analytic solution;

(2) if $k > 1$, $(G_{b,k})$ has analytic solution, if and only if there is a "compatibility" condition between φ and f.

(Ⅱ) When $b = (2n+1)(k+1)+1$ or $b = (2n+1)(k+1)-1$, $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, some "compatibility" conditions between φ and f are necessary and sufficient in order to have analytic solutions for ($(G_{b,k})$. Furthermore, they are not unique in this case.