广义超双曲型方程在乘积区域中的Dirichlet问题*

吴 方 斌

（华中工学院数学系）

本文讨论广义超双曲型方程在乘积区域中的Dirichlet问题，给出了解唯一的充要条件，在唯一性假设下证明了解的存在性。最后在解不唯一时刻画了解的结构，并给出一个可解的充分条件。

§1 引言和Sobolev空间的一些性质

一般来说，二阶双曲型方程的边值问题是不适定的，但加上适当条件后，〔1〕,〔3〕,〔4〕中证明了某些边值问题解的唯一性。本文首先将上述结果推广到一类高阶的所谓广义超双曲型方程，然后讨论了解的存在性并在一般情形讨论了解的结构。本节引进一类Sobolev空间并列出其若干性质，这些几乎都可在〔5〕的第一章附注中找到。

若$\Omega\subset R^n$满足下列条件则称之为R^n中正则开集：i）Ω为R^n中有界开集，ii）$\Gamma=\partial\Omega$为$n-1$维可定向紧可微流形且Ω位于其一侧。

设$\Omega_1\subset R^{n_1}$为一正则开集，V为一Hilbert空间，记$\mathcal{D}[\Omega_1;V]$为定义于Ω_1上取值V中的具有紧支集无穷可微函数所成线性空间，类似于$\mathcal{D}(\Omega_1)$地引进拓扑，其对偶空间为$\mathcal{D}'[\Omega_1;V]$。$L^2[\Omega_1;V]$为定义于Ω_1取值于V的平方强可积函数全体，赋以积分范数。

$$H^{m}[\Omega_1;V]=\{u\in\mathcal{D}'[\Omega_1;V]\,|D^\alpha u\in L^2[\Omega_1;V],\ \forall|\alpha|\leqslant m_1,\ m_1\text{为非负整数}\}$$

$$\|u\|^2_{H^{m_1}[\Omega;V]}=\sum_{|\alpha|\leqslant m_1}\int_{\Omega_1}\|D^\alpha u\|_V^2dx$$

$H^{m_1}[\Omega_1;V]$成一Hilbeet空间，当$0\leqslant m_1\leqslant k_1$时，有：

$$H^{k_1}[\Omega_1;V]\hookrightarrow H^{m_1}[\Omega_1;V]\hookrightarrow L^2[\Omega_1,V]\hookrightarrow\mathcal{D}'[\Omega_1;V]$$

可以完全类似于〔5〕地定义$H^s[M;V]$为一Hilbert空间，这里s为一实数，M为一紧流形或正则开集。因此$H^{m_1}(\Omega_1)$的许多性质都可平行地搬到$H^{m_1}[\Omega_1,V]$中来。

延拓定理：$\forall m_1\in N^+=\{1,\ 2,\ \cdots\}$，$\exists\ P$：$H^k[\Omega_1;V]\longrightarrow H^k[R^{n_1};V]$（$0\leqslant k\leqslant m_1$）为线性连续算子且$\forall u\in L^2[\Omega_1;V]$时，$Pu=u\ a.e.$于$\Omega_1$。

稠密性定理：$\forall m_1\geqslant0$，$\mathcal{D}[\bar{\Omega}_1;V]$在$H^{m_1}[\Omega_1;V]$中稠密。

迹定理：记$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\big|_{\Gamma_1}$为$u\in\mathcal{D}[\bar{\Omega}_1;V]$在$\Gamma_1=\partial\Omega_1$上的$j$阶外法向导，则$\gamma$：$\mathcal{D}[\bar{\Omega}_1;V]\ni u\longrightarrow$

$$\gamma u=\left(u|_{\Gamma_1},\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_1},\ \cdots,\ \frac{\partial^{m_1-1}u}{\partial\nu^{m_1-1}}\Big|_{\Gamma_1}\right)\in(\mathcal{D}[\Gamma_1;V])^{m_1}$$ 可唯一地延拓成$H^{m_1}[\Omega_1;V]$到$\prod_{j=0}^{m_1-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\Gamma_1;V]$上的满射线性连续算子，延拓后的算子仍记为$\gamma$称之为迹算子。

为了区别起见，记γ_1为从$H^{m_1}[\Omega_1]$到$\prod_{j=0}^{m_1-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$的迹算子

* 1982年 3 月11日收到。

设$\Omega_2 \subset R^{n_2}$为正则开集，取$V = H^{m_2}(\Omega_2)$ 得到下列空间$H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)] = H^{m_2}[\Omega_2; H^{m_1}(\Omega_1)]$，其中元素可视为定义于$\Omega_1 \times \Omega_2$上取值于C中的点函数。为避免混淆，以后仍视$\gamma u$为$H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)]$ 中元素u在$\Gamma_1 = \partial\Omega_1$上的迹。

引理 1 $H^m[R^{n_1}, H^m(R^{n_2})] \hookrightarrow H^m(R^{n_1+n_2})$。

证明 不难按定义验证这一包含关系，且有$\|u\|_{H^m[R^{n_1}; H^m(R^{n_2})]} = \|u\|_{H^m(R^{n_1+n_2})}$因此嵌入为连续的。（证完）

引理 2 $m > \frac{n_1+n_2}{2} + l$时，$H^m[\Omega_1; H^m(\Omega_2)] \hookrightarrow C^l(\bar\Omega_1 \times \bar\Omega_2)$。

证明 两次使用延拓定理，不妨设$\Omega_1 = R^{n_1}, \Omega_2 = R^{n_2}$，由引理 1 及通常的嵌入定理立即得到引理。（证完）

引理 3 设$m_1, m_2 \geq 0$，$X \in H^{m_1}(\Omega_1)$，$Y \in H^{m_2}(\Omega_2)$，则$X \cdot Y \in H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)]$ 且

$$\gamma(X \cdot Y) = (\gamma_1 X) \cdot Y \in \prod_{j=0}^{m_1-1} H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\Gamma_1; H^{m_2}(\Omega_2)]$$

证明 取$\{X_n\} \subset \mathscr{D}(\bar\Omega_1)$ $\{Y_n\} \subset \mathscr{D}(\bar\Omega_2)$，$X_n \longrightarrow X(H^{m_1}(\Omega_1))$，$Y_n \longrightarrow Y(H^{m_2}(\Omega_2))$，则$X_n Y_n$为$H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)]$ 中Cauchy 列即$X_n Y_n \longrightarrow W(H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)])$ 且可证明$W = X \cdot Y a.e.$ 于$\Omega_1 \times \Omega_2$，故$X_n Y_n \longrightarrow X \cdot Y(H^{m_1}[\Omega_1; H^{m_2}(\Omega_2)])$ 且成立

$$\gamma(X \cdot Y) = \lim \gamma(X_n Y_n) = \lim(\gamma_1 X_n) \cdot Y_n = (\gamma_1 X_n) \cdot Y_n \in \prod_{j=0}^{m_1-1} H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\Gamma_1; H^{m_2}(\Omega_2)]。（证完）$$

§2 强椭园算子Dirichlet 问题的特征值

设Ω为R^n中正则开集，$P_l(x, D)$ 为$x \in \Omega$上的$2l$阶强椭圆算子，即$\exists c_0 > 0$，使$\forall x \in \Omega, \xi \in R^n$，有$\mathrm{Re}(P_l(x, \xi)) \geq c_0|\xi|^{2l}$。$\forall \lambda \in C$ 记$P_{\lambda, l}(x, D) = P_l(x, D) + \lambda$，

$$\mathscr{P}_\lambda: H^m(\Omega) \ni u \longrightarrow (P_{\lambda, l}(x, D)u, \gamma_1^l u) \in H^{m-2l}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{l-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) (m \geq 2l)$$

引理 4 设Ω为$R^n(n \geq 2)$ 中正则开集，$P_l(x, D)$ 为其上$2l$阶强椭圆算子，则$\exists \lambda_0 \in C$，使$\mathscr{P}_{\lambda_0}$为$H^m(\Omega)$到$H^{m-2l}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{l-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 上的线性拓扑同构（$m \geq 2l$）。

证明 利用〔5〕第二章定理 5.3及Gårding 不等式〔7〕，我们就立即得到这一引理。（证完）

定理 1 在引理 4 的假设下有：

i) $\exists \sigma_{P_l} = \{\nu_n\} \subset C$为一离散可列集，$|\nu_n| \longrightarrow \infty$，$\{u_n\} \subset \mathring{H}_l^m(\Omega)$ 使得$P_l(x, D)u_n - \nu_n u_n = P_{-\nu_n, l}(x, D)u_n = 0$，且$\{u_n\}$构成$\mathring{H}_l^m(\Omega)$ 的一组标准正交完备基（Hilbert基）。

ii) $\forall \lambda \in \sigma_{P_l}$时，$\mathscr{P}_{-\lambda}$为$H^m(\Omega)$ 到$H^{m-2l}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{l-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的同构，其中$\mathring{H}_l^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) | \gamma_1^l u = 0\}$ 为一Hilbert 空间。

证明 i) 由引理 4，$P_{\lambda_0, l}(x, D): u \longrightarrow P_{\lambda_0, l}(x, D)u$为$\mathring{H}_l^m(\Omega)$ 到$H^{m-2l}(\Omega)$的同构，记J：$\mathring{H}_l^m(\Omega)$ 到$H^{m-2l}(\Omega)$ 的嵌入，则 $(P_{\lambda_0, l})^{-1}J$ 为$\mathring{H}_l^m(\Omega)$ 到自身的紧算子，由紧算子谱理论〔2〕，$\exists \{\mu_n\} \subset C$ 为离散可列集为 $(P_{\lambda_0, l})^{-1}J$的特征值集合，$\mu_n \neq 0$，$\mu_n \longrightarrow 0$，其相应的

特征函数系 $\{u_n\}$ 构成$\mathring{H}_l^m(\Omega)$的一组Hilbert基。由直接验算知$P_\lambda(x,D)u_n=(\frac{1}{\mu_n}-\lambda_0)u_n$，故$P_l(x,D)$的特征值集合为$\sigma_{P_l}=\{v_n\}=\{\frac{1}{\mu_n}-\lambda_0\}$，$|v_n|\longrightarrow\infty$，特征函数系似为 $\{u_n\}$。

ii) $\forall_\lambda\bar{\in}\sigma_{pl}$，若$\lambda=-\lambda_0$，则结论显然成立，若$\lambda\neq-\lambda_0$，则$\mu=\frac{1}{\lambda+\lambda_0}\bar{\in}\{\mu_n\}$，因此

$(P_{\lambda 0,l})^{-1}J-\mu$为$H_l^m(\Omega)$上的自同构，故知$P_{-\lambda,l}(x,D)$为$\mathring{H}_l^m(\Omega)$到$H^{m-2l}(\Omega)$上的同构，再结合迹定理知$\mathscr{P}_{-\lambda}$为$H^m(\Omega)$到$H^{m-2l}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{l-1}H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$上的同构。(证完)

§3 广义超双曲型方程在乘积区域中的Dirichlet问题

设$P_{l_x}(x,D_x)(P_{l_y}(y,D_y))$为关于$x\in\Omega_1\subset R^{n_1}(y\in\Omega_2\subset R^{n_2}$的$2l_x(2l_y)$阶强椭圆算子，$\Omega_1(\Omega_2)$为$R^{n_1}(R^{n_2})$中正则开集，$n_1,n_2\geqslant 2$。

所谓广义超双曲型方程在$\Omega_1\times\Omega_2$中的Dirichlet问题就是

$$(A)\begin{cases}P_{l_x}(x,D_x)u(x,y)=P_{l_y}(y,D_y)u(x,y)+f(x,y) & (x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2\\ \frac{\partial^j u}{\partial v_x^j}\Big|_{\partial\Omega_1\times\Omega_2}=\varphi_j(x,y)(0\leqslant j\leqslant l_x-1,\ \frac{\partial^j u}{\partial v_x^j}\Big|_{\partial\Omega_1\times\Omega_2}\text{为}u\text{对}x\text{求沿}\partial\Omega_1\text{外法向的}j\text{阶导数}) \\ \frac{\partial^i u}{\partial v_y^i}\Big|_{\Omega_1\times\partial\Omega_2}=\psi_i(x,y)(0\leqslant i\leqslant l_y-1,\ \frac{\partial^i u}{\partial v_y^i}\Big|_{\Omega_1\times\partial\Omega_2}\text{为}u\text{沿}\partial\Omega_2\text{的外法向对}y\text{的}i\text{阶导数})\end{cases}$$

由于迭加原理，不妨设$\psi_i=0$，在$H^{m_1}[\Omega_1;H^{m_2}(\Omega_2)]$中讨论，(A)可化为下列(A′)：

$$(A')\begin{cases}u\in H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)]\\ P_{l_x}(x,D_x)u=P_{l_y}(y,D_y)+f\\ \gamma^{l_x}u=\varphi\quad(\gamma^{l_x}u\text{为}l_x-1\text{阶迹，是}\gamma u\text{的前}l_x\text{个分量})\end{cases}$$

定理2 $\sigma_{P_{l_x}}=\{\lambda_n\}$，$\sigma_{P_{l_y}}=\{\lambda'_m\}$如§2所指，且有$u\in H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)]$，$\gamma^{l_x}u=0$，$P_{l_x}(x,D_x)u=P_{l_x}(y_0,D_y)u$，则$u=0$的充要条件为$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=\phi$。

证明 i) 设$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}\neq\phi$，$\exists s,k\in N^+$使$\lambda_s=\lambda'_k$，设$X_s(Y_k)$为$P_{l_x}(x,D_x)(P_{l_y}(y,D_y))$在$\mathring{H}_{l_x}^{m_1}(\Omega)(\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2))$中相应的特征函数，则$w=X_sY_k$满足定理条件但非零。

ii) 设$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=\phi$，$\forall n\in N^+$，$Y_n^*$为$P_{l_y}^*(y,D_y)$在$\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)$中对应于$\overline{X}_n$的特征函数，记$h_n=(u,Y_n^*)_{L^2(\Omega_2)}$，现证$h_n\in\mathring{H}_{l_x}^{m_1}(\Omega_1)$，显然$h_n\in H^{m_1}(\Omega_1)$，由于$\gamma^{l_x}[(v,Y_n^*)_{L^2(\Omega_2)}]=(\gamma^{l_x}v,Y_n^*)_{L^2(\Omega_2)}$对任意$v\in\mathscr{D}[\overline{\Omega}_1;H^{m_2}(\Omega_2)]$成立，由稠密性定理，此式对$u$亦成立，故$\gamma^{l_x}(h_n)=(\gamma^{l_x}u,Y_n^*)_{L^2(\Omega_2)}=0$，所以$h_n\in\mathring{H}_{l_x}^{m_1}(\Omega_2)$，利用Green公式知$P_{l_x}(x,D_x)h_n=\lambda'_nh_n$，由于$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=\phi$，知$h_n=0$，由$\{Y_n^*\}$的完备性知$u=0\ a.e.$于$\Omega_1\times\Omega_2$，故$u=0$。(证完)

定理3 若$\sigma_{P_{l_y}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=\phi$，$m_1\geqslant 2l_x$，$m_2\geqslant 2l_y$，且$f\in H^{m_1-2l_x}[\Omega_1;\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)]$，$\varphi\in\prod_{j=0}^{l_x-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\partial\Omega_1;\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)]$，则存在唯一$u\in H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)]$为(A′)之解。

证明 由定理2知解必唯一。下面用分离变量法求出问题的解。设Y_n为$P_{l_y}(y,D_y)$在$H_{l_y}^{m_2}(\Omega_2)$中对应于λ'_n的特征函数，将f,φ按$\{y_n\}$展开成级数：

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nY_n\quad f_n=(f,Y_n)_{H^{m_2}(\Omega_2)}\in H^{m_1-2l_x}(\Omega_1)$$

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n Y_n \quad \varphi_n=(\varphi,Y_n)_{H^{m_2}(\Omega_2)}\in\prod_{j=0}^{l_x-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1)$$

求解： $P_{l_x}(x,D_x)X_n-\lambda'_n X_n=f_n \quad \gamma_1^{l_x}(X_n)=\varphi_n$.

由于$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=\phi$，由定理1知有唯一的$X_n\in H^{m_1}(\Omega_1)$为上述解，且$\|X_n\|^2_{H^{m_1}(\Omega_1)}\leqslant c_n(\|f_n\|^2_{H^{m_1-2l_x}(\Omega_1)}+\|\varphi_n\|^2_{\prod_{j=0}^{l_x-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}\partial\Omega_1})$。由于$|\lambda'_n|\longrightarrow\infty$知$c_n=\|(P_{l_x}(x,D_x)-\lambda'_n)^{-1}\|^2\leqslant M$。取$u_p=\sum_{n=1}^{p}X_nY_n\in H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)]$，由以上不等式知$\{u_p\}$为一Caucy列，所以$u_p\longrightarrow u(H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)])$，直接验证知$u$为（A′）的解且有

$$\|u\|^2_{H^{m_1}[\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)]}=\sum_{n=1}^{\infty}\|X_n\|^2_{H^{m_1}(\Omega_1)}\leqslant M(\|f\|^2_{H^{m_1-2l_x}[\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}\Omega_2)]}$$

$$+\|\varphi\|^2_{\prod_{j=0}^{l_x-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\partial\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_1)]})$$

（证完）

下面假设$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=S=\{\lambda_{n_1m_1},\lambda_{n_2m_2},\cdots,\lambda_{n_km_k}\}$，其中$\lambda_{n_im_i}=\lambda_{n_i}=\lambda'_{m_i}(i=1,2,\cdots,k)$。并假设$P_{l_y}(y,D_y)$为自共轭算子，此时我们有：

定理 4 若$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=S=\{\lambda_{n_1m_1},\lambda_{n_2m_2},\cdots,\lambda_{n_km_k}\}$为一有限集，$P_{l_y}(y,D_y)$自共轭，则对应于（A′）的齐次边值问题的解必为$u=\sum_{i=1}^{k}c_iX_{n_i}Y_{m_i}$（$c_i$为任意复常数），其中$X_{n_i}(Y_{m_i})$为与$\lambda_{n_i}(\lambda'_{m_i})$相应的$P_{l_x}(x,D_x)(P_{l_y}(y,D_y))$的特征函数。

证明 显然u为齐次的（A′）的解，现设u为相应于（A′）的齐次问题的解，Y_n为$P_{l_y}(y,D_y)$相应于λ'_n的特征函数，令$h_n=\int_{\Omega_2}uY_n dy$，由于$P_{l_y}(y,D_y)$自共轭，同证明唯一性定理2时一样知$h_n\in\mathring{H}^{m_1}_{l_y}(\Omega_1)$且

$$P_{l_x}(x,D_x)h_n=\lambda'_n h_n \qquad n=1,2,\cdots$$

故当$n=n_i$时$h_n=c_iX_{n_i}$ $n\neq n_i$（$i=1,2,\cdots,k$）时$h_n=0$，由展开定理知$u=\sum_{i=1}^{k}c_iX_{n_i}Y_{m_i}$（证完）

引理 5 设X，Y为Banach空间，$p\in\mathscr{L}[X,Y]$为$X/\ker p$到Y上的同构，且$\ker p$为局部紧，则$\forall y\in Y,\exists x\in X$使$px=y$且$\|x\|_X\leqslant c_p\|y\|_{Y_0}$（$c_p$与$x,y$无关）

证明 由假设，$\forall y\in Y,\exists x_0\in X$，使得$p(\widetilde{x}_0)=y$且$\|\widetilde{x}_0\|_{X/\ker p}\leqslant c_p\|y\|_Y$，$c_p$与$x_0,y$无关，$\widetilde{x}_0$为$x_0$关于$\ker p$的等价类，由于$\|\widetilde{x}_0\|_{X/\ker p}=\inf_{x\in\ker p}\|x_0+x_1\|_X$，由于$\ker p$为局部紧，$x_2\in\ker p$使$\|\widetilde{x}_0\|_{X/\ker p}=\|x_0+x_2\|_X$，取$x=x_0+x_2$则$Px=Px_0+Px_1=y$且$\|x\|_X\leqslant c_p\|y\|_Y$ （证完）

定理 5 设$\sigma_{P_{l_x}}\cap\sigma_{P_{l_y}}=S=\{\lambda_{n_1m_1},\cdots,\lambda_{n_km_k}\}$，$P_{l_y}(y,D_y)$自共轭，$m_1\geqslant 2l_x$，$m_2\geqslant 2l_y$，$f=\sum_{n=1}^{\infty}f_nY_n\in H^{m_1-2l_x}[\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)]$，$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nY_n\in\prod_{j=0}^{l_x-1}H^{m_1-j-\frac{1}{2}}[\partial\Omega_1;\mathring{H}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)]$（$f_n$，$Y_n$，$\varphi_n=(\varphi_n^0,\varphi_n^1,\cdots,\varphi_n^{l_x-1})$为定理3中所指）且

$$\forall v\in N^*_{n_i}=\{v\in\mathscr{D}(\overline{\Omega}_1)\,|\,P^*_{l_x}(x,D_x)v=\lambda_{n_i}v,\ \gamma_1^{l_x}(v)=0\}\text{ 成立}$$

$$\int_{\Omega_1} f_{n_i}\bar{v}\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{l_x-1}\int_{0\partial\Omega_1}\varphi^j_{n_i}\overline{\frac{\partial^j v}{\partial v^j}}\mathrm{d}x = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,\ k)$$

则 $\exists u_1 \in \mathrm{H}^{m_1}[\Omega_1,\ \mathring{\mathrm{H}}^{m_2}_{l_y}(\Omega_2)]$ 为（A′）的解且（A′）的一般解必为:

$$u = u_1 + \sum_{i=1}^{k} c_i X_{n_i} Y_{m_i}$$

其中$X_{n_i}(Y_{m_i})$ 为$\lambda_{n_i}(\lambda'_{m_i})$ 所对应的$P_{l_x}(x,\mathrm{D}_x)(P_{l_y}(y,\mathrm{D}_y))$ 的特征函数。

证明 同定理 3 一样，求解:

$$P_{l_x}(x,\mathrm{D}_x)X^1_n - \lambda'_n X^1_n = f_n \qquad \gamma^{l_x}_1(X^1_n) = \varphi_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

当$n \neq n_i$ $(i=1,2,\cdots,\ k)$ 时，存在唯一的解X^1_n且满足与定理 3 的证明中相同的不等式

$$\|X^1_n\|^2_{\mathrm{H}^{m_1}(\Omega_1)} \leqslant M\,(\|f_n\|^2_{\mathrm{H}^{m_1-2l_x}(\Omega_1)} + \|\varphi_n\|^2_{\prod\limits_{j=0}^{l_x-1}\mathrm{H}^{m_1-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1)})$$

当$n = n_i$时，由〔5〕第二章定理5.3知

$$\mathscr{A}_{n_i}:\ u \longmapsto ((P_{l_x}(x,\mathrm{D}_x) - \lambda_{n_i})u,\ \gamma^{l_x}_1 u)$$

为$\mathrm{H}^{m_1}(\Omega_1)/\ker\mathscr{A}_{n_i}$到$\mathrm{Im}\mathscr{A}_{n_i}$的同构。且由于$\ker\mathscr{A}_{n_i}$为局部紧，　且（$f_{n_i}, \varphi_{n_i}$）$\in \mathrm{Im}\mathscr{A}_{n_i}$，由引理 5 知有$X^1_{n_i} \in \mathrm{H}^{m_1}(\Omega_1)$ 为上述问题的解且满足:

$$\|X^1_{n_i}\|^2_{\mathrm{H}^{m_1}(\Omega_1)} \leqslant c_{n_i}(\|f_{n_i}\|^2_{\mathrm{H}^{m_1-2l_x}(\Omega_1)} + \|\varphi_{n_i}\|^2_{\prod\limits_{j=0}^{l_x-1}\mathrm{H}^{m_1-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1)})$$

再进行与定理 3 相同的讨论，可得到u_1为（A′）的解。现设 u 为（A′）的任一解，$u-u_1$必为与（A′）相应的齐次问题的解，由定理 4 知$u - u_1 = \sum_{i=1}^{k} c_i X_{n_i} Y_{m_i}$即

$$u = u_1 + \sum_{i=1}^{k} c_i X_{n_i} Y_{m_i} \qquad \text{（证完）}$$

附注 1 在上面的讨论中，若对f,φ的光滑性作进一步要求就可选取m_1，m_2适当大，因而得到问题的古典解。这里不拟详述。

附注 2 在上述讨论中若取$P_{l_x}(x,\mathrm{D}_x) = \Delta_{n1}$，$P_{l_y}(y,\mathrm{D}_y) = \Delta_{n2}$，则得到超双曲型方程的 Dirichlet 问题。对于超双曲型方程的Neumann问题及其它方程的某些边值问题，本文采用的方法仍然适用，只要类似于引理 4 的结论成立。

参 考 文 献

〔1〕Diag, J.B.& Yong, E.C., Uniqueness of Solutions of Certain Boundary Value Problems for Ultrahyperbolic Equations, Proc.Amer.Math.Soc., 29(1971), 569—574.

〔2〕Dieudoneć, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1969.

〔3〕Dunninger, D.R.& Eachmanoglou, E.C., The conditions for uniueness of the Dirichlet Problem for hyperbolic equations in Cylindrical domains, J. Math.Mech., 18(1969), 763—766.

〔4〕Khalique, C.M., Dirichlet and Neumann problems for the one-dim-ensional

wave equation in a rectangle, J.dondon Math.Soc.(2)22(1980), 543—548.
〔5〕 Lions, J.L.&Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Sppinger-Verlag, Berlin and New York, 1972.
〔6〕 Schechter, M., Modern Methods in Partial Diff.Eqs.Mcgraw-Hill, 1977.
〔7〕 Treves, F., Basic Linear partial Diff.Eqs., Academic Press, 1975.