

两阶段抽样的序贯密度估计*

赵林城

(中国科技大学数学系)

§1 引言

设 $X_1, \dots, X_n$ 为自一维总体中取出的 iid 样本, $F(x)$ 及 $f(x)$ 分别为总体的分布函数及密度函数。为估计 $f(x)$, Wolverton 和 Wagner^[1], 以及 Yamato^[2] 独立地进行了递归密度估计

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j} K\left(\frac{x - X_j}{h_j}\right), \quad (1)$$

此处, $K(x)$ 为核密度, $\{h_j\}$ 为一串趋于 0 的正数。

设 x 固定, 且 $f(x) > 0$ 。1976 年, Carroll 在 [3] 中利用 Bickel 和 Wichura^[4] 关于多参数过程弱收敛的准则, 构造了 $f(x)$ 的 Chow-Robbins 意义下的序贯区间估计 (参看 [5])。

本文将以递归密度估计 (1) 为基础, 构造 $f(x)$ 的一个两阶段序贯置信区间 $|f_N(x) - f(x)| \leq d$, 使其具有指定的长度 $2d$, 及指定的渐近置信系数 $1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)。一维总体均值的这类区间估计, 曾在 1980 年由 Mukhopadhyay 在 [6] 中讨论过。

如果, 设 $d > 0$ 及 $\alpha \in (0, 1)$ 为预先指定的实数。取 $a > 0$, 使

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-u^2/2} du = 1 - \alpha \quad (2)$$

设密度 f 及核密度 K 满足以下 A、B 两组条件之一:

(A) A1. f 满足 λ 阶 Lipschitz 条件 ($0 < \lambda \leq 1$),

A2. K 有界, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} |y|^\lambda K(y) dy < \infty$ 。

(B) B1. f' 有界且满足 $\lambda - 1$ 阶 Lipschitz 条件 ($1 < \lambda \leq 2$),

B2. K 有界, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} y K(y) dy = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} |y|^\lambda K(y) dy < \infty$ 。

取

$$h_j = j^{-\beta}, \text{ 其中 } \frac{1}{1+2\lambda} < \beta < 1, \quad (3)$$

$$n_0 = [a/d] + 1, \quad (4)$$

首先从总体中抽取样本 $X_1, \dots, X_{n_0}$ (iid), 按 (1) 式作出 $f_{n_0}(x)$ 。令

$$N = \max \{n_0, \left\lceil \left(\frac{a^2 f_{n_0}(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy}{d^2} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right\rceil + 1\}, \quad (5)$$

*1983年2月28日收到。

此处, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。第二步, 与第一步独立地再从总体中抽出 $N - n_0$ 个 iid 样本 $X_{n_0+1}, \dots, X_N$, 并作出 $f(x)$ 的区间估计

$$|f_N(x) - f(x)| \leq d. \quad (6)$$

我们证明了下述定理:

定理 设 $f(x) > 0$, f 及 K 满足 A、B 两组条件之一, 且 (2)–(5) 式成立。记

$$\tau = \{a^2 f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy\}^{\frac{1}{(1-\beta)}} \quad (7)$$

则有:

$$\lim_{d \rightarrow 0} d^{\frac{2}{1-\beta}} N(d) = \tau \quad a.s. \quad (8)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} P(|f_N(x) - f(x)| \leq d) = 1 - a \quad (9)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} d^{\frac{2}{1-\beta}} E N(d) = \tau \quad (10)$$

§ 2 几个引理

在给出引理 1 之前, 先引进下列记号。

用 $D = D[0, 1]$ 记 $[0, 1]$ 区间上右连续且左极限存在的函数全体组成的空间, 并赋予 Skorohod 拓扑, 使之成为完备空间。设 $\mathcal{D}$ 是 D 中所有开集生成的 σ -域 $\mathcal{W}$ 既表示 $(D, \mathcal{D})$ 上的 Wiener 测度。又表示 Brown 运动 $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$ 。

设 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 相互独立, $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \dots$, $S_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \rightarrow \infty$ 。记 $s_0 = 0$,

$$L_n(t) = \max \{j: s_j^2 \leq t s_n^2\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (11)$$

$$Y_n(t) = \sum_{j=1}^{L_n(t)} \xi_j / S_n, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (12)$$

则由 Prohorov^[7] (参看 [8], P77), 当 $\{\xi_n\}$ 满足 Linderberg 条件时, 有

$$Y_n \xrightarrow{d} W \quad (13)$$

引理 1 设 $\{\xi_n\}$ 满足上述条件及 Linderberg 条件, $a_n \rightarrow \infty$, $\{v_n\}$ 为一列整数值随机变量, 与 $\{\xi_n\}$ 定义在同一概率空间上, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$s_{v_n}^2 / a_n \xrightarrow{p} \theta, \quad (14)$$

$\theta > 0$ 为一有限实数, 令

$$Z_n(t) = \sum_{j=1}^{L_n(t)} \xi_j / s_{v_n}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (15)$$

则

$$Z_n \xrightarrow{d} W. \quad (16)$$

证 不失一般性, 可设 $0 < \theta < 1$ 。令

$$k_n = \inf \{k: s_k^2 \geq a_n\}, \quad (17)$$

则 $k_n \rightarrow \infty$, 且 $s_{k_n}^2 \geq a_n$ 而 $S_{k_{n-1}}^2 < a_n$ 。由 $\{\xi_n\}$ 满足 Linderberg 条件, 知 $\max_{j \leq n} \sigma_j / s_n \rightarrow 0$ (n

$(n \rightarrow \infty)$ 。故由 $1 - \frac{\sigma_{k_n}^2}{S_{k_n}^2} < \frac{a_n}{S_{k_n}^2} < 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/S_{k_n}^2 = 1$, 因而

$$S_{v_n}^2/S_{k_n}^2 \xrightarrow{p} \theta, \quad 0 < \theta < 1 \quad (18)$$

记 $D_0 = \{\varphi \in D: \varphi \text{ 非减, 且 } 0 \leq \varphi(t) \leq 1 \text{ 对 } t \in [0, 1]\}$ 。视 D_0 为 D 的子空间, 赋予相对的 Skorohod 拓扑。因为 $D_0 \in \mathcal{D}$, 因而 D_0 中的 Borel σ -域 $\mathcal{D}_0 = \{B: B \subset D_0, B \in \mathcal{D}\}$ 。对 $x \in D$ 和 $\varphi \in D_0$, 定义 $x \circ \varphi$ 为 x 和 φ 的复合函数: $(x \circ \varphi)(t) = x(\varphi(t))$, $0 \leq t \leq 1$ 。则映照 $\lambda: (x, \varphi) \rightarrow x \circ \varphi$ 为 $D \times D_0$ 到 D 内的可测映照。令

$$\Phi_n(t, \omega) = \begin{cases} t S_{v_n}^2(\omega)/S_{k_n}^2, & \text{若 } S_{v_n}^2(\omega) \leq S_{k_n}^2, \\ t\theta, & \text{若 } S_{v_n}^2(\omega) > S_{k_n}^2 \end{cases} \quad (19)$$

则
$$\sup_t |\Phi_n(t) - t\theta| \leq \left| \frac{S_{v_n}^2}{S_{k_n}^2} - \theta \right| \xrightarrow{p} 0,$$

记 $\varphi(t) = \theta t$, $0 \leq t \leq 1$ 。则在 Skorohod 拓扑之下, $\Phi_n \xrightarrow{p} \varphi \in D_0$ 。但 $Y_{k_n} \xrightarrow{d} W$, 故由 [8], 定理 4.4, 知

$$(Y_{k_n}, \Phi_n) \xrightarrow{d} (W, \varphi). \quad (20)$$

令 $C = C[0, 1]$ 为 $[0, 1]$ 区间上连续函数全体在一致拓扑之下所成的空间, 它是 D 的子空间。易见, Ψ 在 $C \times C$ 上连续。由 [8], 定理 5.1 的推论 1, 知上式蕴涵了

$$Y_{k_n}, \Phi_n \xrightarrow{d} W, \varphi. \quad (21)$$

记

$$Z'_n(t, \omega) = \sum_{l=1}^{L(\omega)(t)} \xi_l(\omega)/S_{k_n}, \quad (22)$$

在 $A_n = \{\omega: S_{v_n}^2(\omega) \leq S_{k_n}^2\}$ 上, $Y_{k_n}(\Phi_n(t, \omega), \omega) = Z'_n(t, \omega)$, 由 (18) 式, $P(A_n) \rightarrow 1$ 故

$$Z'_n \xrightarrow{d} W, \varphi. \quad (23)$$

但

$$\sup_t \left| \frac{1}{\sqrt{\theta}} Z'_n(t, \omega) - Z_n(t, \omega) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{S_{k_n}}{S_{v_n}} \right| \sup_t |Z'_n(t, \omega)| \xrightarrow{p} 0 \quad (24)$$

故

$$Z_n \xrightarrow{d} \theta^{-\frac{1}{2}}(W \circ \varphi), \quad (25)$$

但 $\theta^{-\frac{1}{2}}(W \circ \varphi)$ 与 W 有相同的分布, 这就证明了 (16) 式。

为引进引理 2, 我们暂时抛开 $h_j = j^{-\theta}$ 的假定。

引理 2 设 f 及 K 满足 A、B 两组条件之一, $f(x) > 0$, $k_n \rightarrow \infty$ 。 $\{v_n\}$ 为一串整值随机变量。 $\{v_n\}$ 及 $\{h_n\}$ 满足下述条件:

$$0 < h_n \rightarrow 0 \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^n h_j^2 / \sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^{-1}} \rightarrow 0, \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^n h_j^{-(1+\delta)} / \left(\sum_{j=1}^n h_j^{-1} \right)^{1+\frac{\delta}{2}} \rightarrow 0 \text{ 对某个 } 0 < \delta \leq 1, \quad (28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{v_n} h_j^{-1} / \sum_{j=1}^{k_n} h_j^{-1} = \theta \quad a.s. \quad (29)$$

此处, $\theta > 0$ 为一有限实数, 则

$$\frac{v_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^{-1}}} (f_{v_n}(x) - f(x)) \xrightarrow{d} N(0, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy) \quad (30)$$

证 令 $\xi_j = \frac{1}{h_j} \{K(\frac{x-x_j}{h_j}) - EK(\frac{x-X_j}{h_j})\}$, 则 $E\xi_j = 0$, $j = 1, 2, \dots$. 由关于 f 的假定, f 在 R_1 上有界. 故由 $h_j \rightarrow 0$ 时 $f(x-h_j y) \rightarrow f(x)$, 用控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\frac{x-y}{h_j}) f(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) f(x-h_j y) dy \rightarrow f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy \\ \frac{1}{h_j} \int_{-\infty}^{\infty} K(\frac{x-y}{h_j}) f(y) dy &\rightarrow f(x), \\ \frac{1}{h_j} \int_{-\infty}^{\infty} K^{2+\delta}(\frac{x-y}{h_j}) f(y) dy &\rightarrow f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^{2+\delta}(y) dy. \end{aligned} \quad (*)$$

故若记 $\sigma_j^2 = E\xi_j^2$, $s_j^2 = \sum_{l=1}^j \sigma_l^2$, $\mu_j = E|\xi_j|^{2+\delta}$, $j = 1, 2, \dots$, 则由 stolz 定理, 并考虑到上面三个式子, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 / \sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 / \{ \frac{1}{h_n} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy \} = 1 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu_j / \sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j^{1+\delta}} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^{2+\delta}(y) dy &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n / \{ \frac{1}{h_n^{1+\delta}} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^{2+\delta}(y) dy \} &= 1 \end{aligned} \quad (32)$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 (28) 式, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|\xi_j| > \varepsilon s_n} \xi_j^2 dP &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \mu_j \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j^{1+\delta}} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^{2+\delta}(y) dy}{\varepsilon^2 (\sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy)^{1+\delta/2}} = 0 \end{aligned}$$

即 $\{\xi_n\}$ 满足 Linderberg 条件.

由 (29) 式, 知 $v_n \xrightarrow{a.s.} \infty$. 故由 (31) 式, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 / s_{k_n}^2 = \theta \quad a.s., \text{ 且 } s_{k_n}^2 \rightarrow \infty. \quad (33)$$

由引理 1, 有

$$\frac{1}{s_{v_n}} \sum_{j=1}^{v_n} \xi_j \xrightarrow{a.s.} N(0, 1). \quad (34)$$

但 $s_{v_n}^2 / \sum_{j=1}^{v_n} \frac{1}{h_j} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy \xrightarrow{a.s.} 1$, 故

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p_n} h_j}} \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{h_j} (K(\frac{x-X_j}{h_j}) - EK(\frac{x-X_j}{h_j})) \xrightarrow{d} N(0, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy) \quad (35)$$

但由条件 A 或 B, 以及 (22) 式, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使

$$\begin{aligned} & (\sum_{j=1}^n h_j^{-1})^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{h_j} EK(\frac{x-X_j}{h_j}) - f(x) \right\} \right| \\ &= (\sum_{j=1}^n h_j^{-1})^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K(y) \{f(x-h_j y) - f(x)\} dy \right| \\ &\leq C_1 (\sum_{j=1}^n h_j^{-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n h_j^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\frac{1}{2}} K(y) dy \\ &\leq C_2 (\sum_{j=1}^n h_j^{-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n h_j^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (36)$$

故由 $v_n \rightarrow \infty$ a.s., 知

$$(\sum_{j=1}^{p_n} h_j^{-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p_n} \left(\frac{1}{h_j} EK(\frac{x-X_j}{h_j}) - f(x) \right) \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (37)$$

由 (35) 及 (37) 式, 即得 (30) 式. 引理 2 证毕.

今取 $h_j = j^{-\beta}$, $\beta > 0$. 则条件 (27) — (29) 相当于要求

$$n^{1-\lambda\beta}/n^{(1+\beta)/2} \rightarrow 0, \quad (27')$$

$$n^{1+\beta(1+\delta)/n^{(1+\beta)(1+\delta/2)}} \rightarrow 0 \text{ 对某个 } 0 < \delta \leq 1, \quad (28')$$

$$v_n^{1+\beta}/k_n^{1+\beta} \xrightarrow{a.s.} \theta, \quad \theta > 0 \text{ 为一实数.} \quad (29')$$

即

$$\frac{1}{1+2\lambda} < \beta < 1, \quad v_n/k_n \xrightarrow{a.s.} \theta', \quad \theta' > 0 \text{ 为一实数.} \quad (38)$$

推论 1 设 f, K 满足 A、B 两组条件之一, $f(x) > 0$, $h_j = j^{-\beta}$ 而 (38) 式成立, 则有

$$v_n^{(1-\beta)/2} (f_{v_n}(x) - f(x)) \xrightarrow{d} N(0, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy) \quad (39)$$

引理 3 设有一族 $r.u. Y_d$, $d \in (0, d_0]$, 满足

$$\lim_{d \rightarrow 0} Y_d \xrightarrow{P} Y, \quad (40)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0 < d \leq d_0} P(|Y_d| > k) < \infty. \quad (41)$$

则 $E|Y| < \infty$, 且

$$\lim_{d \rightarrow 0} EY_d = EY \quad (42)$$

证 用 $I(A)$ 记集 A 的示性函数, 则有

$$\begin{aligned} E|Y_d| I(|Y_d| > k) &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} jP(j-1 < |Y_d| \leq j) \\ &= kP(|Y_d| > k) + \sum_{j=k}^{\infty} P(|Y_d| > j) \\ &\leq 2 \sum_{j=[k/2]}^k P(|Y_d| > j) + \sum_{j=k}^{\infty} P(|Y_d| > j), \end{aligned}$$

故由 (41) 式, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 < d \leq d_0} E|Y_d| I(|Y_d| > k) = 0$, 即 $\{|Y_d|, 0 < d \leq d_0\}$ 为一致可积, 因而 $E|Y| < \infty$, 且 (42) 式成立. 引理 3 证毕.

§ 3 定理证明

对由 (3)–(5) 式定义的停止法则, 有

$$\left(\frac{a^2 f_{n_0}(x) \int K^2(y) dy}{d^2} \right)^{1/(1-\beta)} \leq N \leq \left(\frac{a^2 f_{n_0}(x) \int K^2(y) dy}{d^2} \right)^{1/(1-\beta)} + a/d + 2$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad & (a^2 f_{n_0}(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy)^{1/(1-\beta)} \leq N d^{2/(1-\beta)} \\ & \leq (a^2 f_{n_0}(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy)^{1/(1-\beta)} + a d^{(1+\beta)/(1-\beta)} + 2 d^{2/(1-\beta)} \end{aligned} \quad (43)$$

令 $d \rightarrow 0$, 则由 (4) 式, $n_0 \rightarrow \infty$, 由 (*) 式, 有

$$E f_{n_0}(x) \rightarrow f(x), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} E \xi_j^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} h_j^{-2} E K^2\left(\frac{x - X_j}{h_j}\right) \\ &\leq C(x) \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(2-\beta)} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy < \infty, \end{aligned} \quad (45)$$

此处 $C(x) > 0$ 为一与 x 有关的常数, 由 (45) 式, 知

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \xi_j < \infty \quad a.s.,$$

故由 Kronecker 引理, 有

$$\frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} \xi_j \rightarrow 0 \quad a.s., \quad (46)$$

由 (44) 及 (46) 式, 知

$$f_{n_0}(x) \rightarrow f(x) \quad a.s. \quad (47)$$

在 (43) 式中让 $d \rightarrow 0$ 取极限, 即得 (8) 式。

由推论 1, 当 $d \rightarrow 0$ 时,

$$N^{(1-\beta)/2} (f_N(x) - f(x)) \xrightarrow{d} N(0, f(x) \int K^2(y) dy), \quad (48)$$

由已证之 (8) 式, 有

$$\frac{a}{d}(f_N(x) - f(x)) \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (49)$$

故 $P(|f_N(x) - f(x)| \leq d) = P\left(\left|\frac{a}{d}(f_N(x) - f(x))\right| \leq a\right)$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-u^2/2} du = 1 - a,$$

因而 (9) 式得证。

最后, 由 (8) 式及引理 3, 为证 (10) 式, 只需证明存在 $d_0 > 0$, 使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0 < d \leq d_0} P(N(d)d^{2/(1-\beta)} > k) < \infty. \quad (50)$$

但由 (43) 式, 存在常数 $C_3 > 0$, $C_4 > 0$, 使当 $d > 0$ 充分小时, 对充分大的 k , 有

$$\begin{aligned} P(N(d)d^{2/(1-\beta)} > k) &\leq P(f_{n_0}(x) > C_3 k^{1-\beta}) \\ &= P(f_{n_0}(x) - Ef_{n_0}(x) > C_3 k^{1-\beta} - Ef_{n_0}(x)) \\ &\leq P(f_{n_0}(x) - Ef_{n_0}(x) > C_4 k^{1-\beta}). \end{aligned} \quad (51)$$

由 (*) 式及指数不等式 ([9], p. 266.), 存在常数 $C_5 > 0$, 使当 n 充分大时, 对充分大的 k , 有

$$P(f_n(x) - Ef_n(x) > C_4 k^{1-\beta}) \leq \exp\{-C_5 n^{1-\beta} k^{1-\beta}\}. \quad (52)$$

但 $d \rightarrow 0$ 时 $n_0 \rightarrow \infty$, 故由 (51), (52) 式, 知存在 $d_0 > 0$ 使 (50) 式成立, 因而 (10) 得证, 这就完成了定理的证明。

参 考 文 献

- [1] Wolverton, C.T. and Wagner, T.J., Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification, IEEE Trans. Information Theory, IT 15 (1969), 258—265.
- [2] Yamato, H., Sequential estimation of a continuous probability density function and mode, Bull. Math. statist., 14 (1971), 1—12.
- [3] Carroll, R.J., On sequential density estimation, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 36 (1976), 137—151.
- [4] Bickel, P.J. and Wichura, M.J., Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications, Ann. Math. Statist., 42 (1971), 1656—1670.
- [5] Chow, Y.S. and Robbins, H., On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean, Ann. Math. Statist., 36 (1965), 457—462.
- [6] Mukhopadhyay, N., A consistent asymptotically efficient two-stage procedure to construct fixed width confidence intervals for the mean, Metrika, 27 (1981), 281—284.
- [7] Prohorov, Yu.V., Convergence of random processes and limit theorems in p

- probability theory, Theor. Probability Appl., 1 (1956), 157—214.
- [8] Billingsley, P., Convergence of probability measures, John Wiley & Sons, 1968.
- [9] Loeve, M., Probability Theory I, Springer-Verlag, 1977.

《数理统计与应用概率》创刊

由“全国工院校应用概率统计委员会”主办的《数理统计与应用概率》杂志将于1986年8月出创刊号。编辑部设在北京工业大学应用数学系。该杂志面向全国工院校各专业的教师,应用统计工作者和概率、统计研究人员。以刊载数理统计、概率应用成果、以及统计方法、统计计算成果等,适当刊载有实用价值的统计理论研究成果。望广大读者踊跃投稿和订阅。