1986年5月

数学研究与评论
第六卷　第二期

关于MHR—环的诣零子环

惠昌常

（陕西师大数学系）

F.A.Szász 在六十年代初提出了MHR—环的概念

即

定义　若结合环A对主右理想有极小条件则A叫做一个MHR—环.

1981年，在环根理论的专著〔7〕中，他提出了一个未解决的问题（问题43）：MHR—环的每一个诣零子环都是局部幂零的吗？

本注将给出这个问题的肯定回答。

我们先作一点准备。

定义〔2〕　设Δ是一个环，环A叫做Δ上的局部矩阵环，如果对A的任意有限子集都包含在A的一个子环S中，而S同构于Δ上的一个全环阵。

引理1（〔1〕，P84）环A是一些单环的直和的充要条件是：（1）　$A^2=A$，（2）　每个理想都是A的直和项。

引理2（〔2〕，P90）有极小单侧理想的单环是除环上的局部矩阵环。

引理3〔3〕，P489 除环Δ上的全阵环Δ_n的诣零子环都是幂零的。

下面我们先给出一个命题

命题　设A是MHR—环，L是其Levitzki 根，则$A/L=\overline{A}$是有极小右理想的单环的直和。

证　分几个步骤来证明

（i）　$\overline{A}$的每个非零右理想$\overline{R}$都包含$\overline{A}$的一个极小右理想。

事实上，设R是$\overline{R}$在自然同态下的完全象源，因$\overline{R}\neq\overline{O}$，故$R\supsetneqq L$且$W=\{\langle x\rangle \mid x\in R\setminus L\}\neq\phi$。其中$\langle x\rangle$表示由$x$在A中生成的右理想。令W中极小者为$\langle x_0\rangle$。则$\overline{\langle x_0\rangle}$就是$\overline{R}$中的$\overline{A}$的一个极小右理想。事实上，设有$\overline{A}$的一个非零右理想$H\subseteq\overline{\langle x_0\rangle}$，任取$\overline{o}\neq\overline{x_1}\in H$，则有$x_1=b+c$，其中$b\in\langle x_0\rangle$，$c\in L$　易见$b\in\langle x_0\rangle\setminus L$，$b\in R$。由$\langle x_0\rangle$的极小性，有$\langle b\rangle=\langle x_0\rangle$。于是$\langle\overline{x_1}\rangle_{\overline{A}}=\langle\overline{b}\rangle_{\overline{A}}=\overline{\langle b\rangle}=\overline{\langle x_0\rangle}$。从而$\overline{\langle x_0\rangle}\subseteq H$。故有$H=\overline{\langle x_0\rangle}$。

因为$\overline{A}$是半素环，易得

（ii）　$\overline{A}$的每个极小右理想必含幂等元。

由（i）和（ii）易得

（iii）　$\overline{A}$作为右$\overline{A}$—模是完全可约$\overline{A}$—模。即有$\overline{A}=\sum_{a+\Gamma}\oplus e_a\overline{A}$，其中$e_a$是幂等元，$e_a\overline{A}$是极小右理想，这里的直和表示模的直和。

（iv）　$\overline{A}$是有极小右理想的单环的直和。

事实上，因$(e_a\overline{A})^2=e_a\overline{A}$ið $\overline{A^2}=\overline{A}$其次证$\overline{A}$的每个真理想都是直和项,设B是$\overline{A}$的一个真理想，则至少有一个$e_a\overline{A}$　使$e_a\overline{A}\cap B=\overline{O}$。不然，对任一$a\in\Gamma$，若都有$e_a\overline{A}\cap B\neq O$，由$e_a\overline{A}$

1984年1月20日收到

的极小性，必有$e_a\overline{A}\subseteq B$，从而推出$\overline{A}\subseteq B$的矛盾。令

$$W=\{a\in\Gamma \mid e_a\overline{A}\cap B=O\}\ ,\ C=\sum_{a\in W} e_a\overline{A}$$

对任意$a\in\overline{A}$，则$a=r_{a_1}+\cdots+r_{a_m}$，$r_{a_j}\in e_{a_j}\overline{A}$，且对任意$a_j\ (j=1,\cdots,m)$，有$e_{a_j}\overline{A}\cap B=\overline{O}$，或$e_{a_j}\overline{A}\cap B=e_{a_j}\overline{A}$，若为前者，$a_j\in W$，从而$e_{a_j}\overline{A}\subseteq C$，即得$r_{a_j}\in C$，若为后者，易见$r_{a_j}\in B$。从而$a\in B+C$，即$\overline{A}=B+C$，对任意$a\in W$，有$e_a\overline{A}\cdot B=\overline{O}$，从而$[B(e_a\overline{A})]^2=\overline{O}$，因B也是半素环，故$B\cdot e_a\overline{A}=O$，因此C是$\overline{A}$的理想，另外$B\cap C=O$。设$b\in B\cap C$，则有$b=r_{a_1}+\cdots+r_{a_n}\in B$，$r_{a_i}\in e_{a_i}\overline{A}$，$a_i\in W$，因为$e_{a_i}\overline{A}\cap B=\overline{O}$，故$bB=\overline{O}$，又B是半素环，故$b=o$，因此，$B\cap C=O$，这样$\overline{A}=B\oplus C$，根据引理1，$\overline{A}$是一些单环$A_a$，$a\in\Gamma_1$的直和，即$\overline{A}=\sum_{a\in\Gamma_1}\oplus A_a$。

由（i）知，A_a，$a\in\Gamma_1$是含有$\overline{A}$的极小右理想M的环，从而MA_a便是A_a的极小右理想。

现在我们来证明

定理 MHR—环A的每个诣零子环都是局部幂零的。

证 先证$\overline{A}=A/L$的任意有限生成诣零子环$H=\langle b_1,\cdots,b_n\rangle$是幂零的，其中L为A的Le——vitgki根。

由上命题，$\overline{A}=\sum_{a\in\Gamma}\oplus A_a$，其中$A_a$是有极小右理想的单环，Γ指标集，则必存在$a_1,\cdots,a_m\in\Gamma$，

使

$$b_i=b_{i1}+\cdots+b_{im},\ i=1,\cdots,n。$$

其中$b_{ij}\in A_{a_j}$。令$H_j=\langle b_{ij}\mid i=1,\cdots,n\rangle$，则显见，$H\leqslant H_1+\cdots+H_m$。故只需证明每个$H_j$是幂零的即可。

事实上，由引理2知，A_{a_j}是除环$\Delta^{(j)}$上的局部矩阵环。故存在子环$B'_j\leqslant A_{a_j}$使$b_{ij}\in B'_j\leqslant A_{a_j}$，且$B'_j\simeq\Delta_m^{(j)}$，其中$m_j$是自然数，虽然$H_j\leqslant B'_j$，再由引理3，$H_j$是幂零的，这样H便是幂零子环。

设S是A的一个诣零子环，令$a_1,\cdots,a_n$是S的任意有限个元素，$S_1=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$，显然，$(S_1+L)/L$是$\overline{A}=A/L$的有限生成诣零子环，由上述事实知，$(S_1+L)/L$是$\overline{A}$的幂零子环，从而$S_1+L$是局部幂零的故$S_1$是局部幂零的，又因为$S_1$是有限生成的，故$S_1$还是幂零的，这样，便证明了S是A的一个局部幂零子环。

作者对雷天德导师的热情帮助和指导，谨致衷心感谢。

参 考 文 献

〔1〕Szász, F, A. Radicals of Rings. Akadémiai kiadó, Budapest, 1981.

〔2〕Jacobson, N, Structure of rings, Amer Math Sori colloguium publ Vol 37, Pr——ovidence 1956.

〔3〕谢邦杰，抽象代数学，上海科技出版社，1982。