关于结合环上的微商*

牛 凤 文

（吉林大学）

设R为结合环，d为其上的可加变换，且对任意x，$y\in$R都有

$$d(xy)=d(x)y+xd(y)$$

则说d是R的一个微商。

Herstein在文〔1〕中证明了一个有名的定理，设R是特征数不为2的质环，d是R的一个微商，且对任意x，$y\in$R 有

$$d(x)d(y)=d(y)d(x)$$

则d为零变换或者R为可换环。

本文用相当明了的方法给出微商变换的一个重要性质，它把上述Herstein 定理在两个方向上做了推广。

定理 设R是特征数不为2的质环，N是R的非零双边理想，f，g是R的二个微商，且对任意$x,y\in$N都有

$$f(x)g(y)=g(y)f(x),$$

则f，g必至少有一个为零变换或者R为可换环。

要证此定理，先给出

引理 设R是特征数不为2的质环，N是R的非零双边理想，f，g是R的两个微商。若对任意$x\in$N都有$(fg)(x)=0$，则f与g至少有一个是R上的零变换。

证明 任取x，$y\in$N，则$xy\in$N，故

$$(fg)(xy)=f(xg(y)+g(x)y)=0,$$

从而 $$f(x)g(y)+x(fg)(y)+g(x)f(y)+(fg)(x)y=0,$$

故得 $$f(x)g(y)+g(x)f(y)=0 \tag{1}$$

再任取$z\in$N，做类似的计算，应有

$$x(f(y)g(z)+g(y)f(z))+(f(x)g(y)+g(x)f(y))z+f(x)yg(z)+g(x)yf(z)=0$$

注意（1），得到

$$f(x)yg(z)+g(x)yf(z)=0 \tag{2}$$

任取$u,v\in$N，则$uf(v)\in$N，用它替代上式中的y，就有

$$f(x)uf(v)g(z)+g(x)uf(v)f(z)=0。$$

但（1）说明$f(v)g(z)=-g(v)f(z)$，故得

$$f(x)ug(v)f(z)-g(x)uf(v)f(z)=0 \tag{3}$$

另一方面，将（2）中y，z用u，v替换，然后右乘$f(z)$，又得

$$f(x)ug(v)f(z)+g(x)uf(v)f(z)=0$$

* 1984年4月3日收到.

将上式与（3）相加，由于R特征非2，得

$$f(x)ug(v)f(z)=0,$$

于是$f(x)RNg(v)f(z)=\{0\}$。由于R为质环，故必有$Ng(v)f(z)=\{0\}$，$g(v)f(z)=0$。也就是$g(N)f(N)=\{0\}$。

这样，又应有

$$g(N)Nf(R)+g(N)f(N)R=\{0\},$$

从而$f(R)=\{0\}$或者$g(N)N=\{0\}$。后一种情形必导致$g(N)=\{0\}$，从而

$$g(NR)=g(N)R+Ng(R)=\{0\},$$

最后得$g(R)=\{0\}$。

在环R中，任意元a都可以导出一个微商I_a：$I_a(x)=ax-xa$，通常称为由a导出的内微商。

这样就可以证明我们的定理了。

定理的证明 对任意x、$y\in R$，

$$f(x)g(y)=g(y)f(x),$$

表明对任意固定y及所有$x\in N$有

$$(I_{g(y)}f)(x)=I_{g(y)}(f(x))=g(y)f(x)-f(x)g(y)=0,$$

据引理，必$f(R)=\{0\}$或$I_{g(y)}$为R上的零变换。后一种情形，对任意$z\in R$都有

$$I_{g(y)}(z)=g(y)z-zg(y)=0。$$

从另一观点来看，这说明I_zg把N中所有元素变成零，再用引理，必有$g(R)=\{0\}$或者I_z为零变换，即z为中心元。由于z的任意性推出R可换。

前面的引理还可以很简捷地证明其它几个有用的事实，例如

推论1 设R是特征数不为2的质环，d是非零微商，U是其Lie理想，Z为R的中心。若$d(U)=\{0\}$，则$U\subset Z$。

证明 设$u\in U$，$r\in R$，由于U是Lie理想，故$ur-ru\in U$，从而

$$d(ur-ru)=ud(r)-d(r)u=0,$$

这表明I_ud是R上零变换，但d不是零变换，故I_u为零变换，$u\in Z$，$U\subset Z$。

这就是文〔2〕的引理5，又如熟知的

推论2 设R为特征非2的质环，N为其非零理想。若有t对任意$x\in N$，都有

$$[t[t,x]]=0,$$

则t为中心元。

事实上，该条件意味着$(I_tI_t)(x)=0$，故I_t为零变换，t为中心元。

References

Herstein. I. N, A Note on derivations, Canad. Math. Bull. Vol. 21（3），1978，pp 369——370。

Bergen. J, Herstein. I. N. and Kerr. J. W, Lie ideals and derivations of prime re—ngs, Journal of Algebra, Vo1.71，1981，pp259——267。