1986年5月

数学研究与评论
第六卷　第二期

高阶中立型方程渐近稳定性的代数判定*

俞　元　洪

（中国科学院应用数学研究所）

微分差分方程渐近稳定性的代数判据在应用时比较方便。最近，文〔1〕给出了滞后型方程渐近稳定的代数判据，文〔2〕给出了一阶中立型方程渐近稳定的代数判据．本文旨在推广文〔2〕的结果，给出高阶中立型方程渐近稳定的代数判据．

考虑中立型微分差分方程

$$\sum_{j=0}^{n}\left[a_j x^{(j)}(t)+b_j x^{(j)}(t-\tau)\right]=0 \tag{1}$$

其中$a_j, b_j(j=0,1,2,\cdots\cdots n)$．$\tau$ 均为实常数，$\tau>0$。

方程（1）的特征方程为

$$f(\lambda)+g(\lambda)e^{-\lambda\tau}=0 \tag{2}$$

其中

$$f(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j\ ,\qquad g(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}b_j\lambda^j \tag{3}$$

当$\tau=0$时方程（2）为

$$f(\lambda)+g(\lambda)=0 \tag{4}$$

当$\lambda=iy$（y实数）时方程（2）记作

$$f(iy)+g(iy)e^{-iy\tau}=0 \tag{5}$$

令
$$\begin{cases} f(iy)=f_1(y)+if_2(y)\,, \\ g(iy)=g_1(y)+ig_2(y)\,, \end{cases} \tag{6}$$

其中f_1，f_2，g_1和g_2均为y的实函数．

引理1[3]　方程（1）的零解为渐近稳定当且仅当方程（2）的根均位于复平面左半部．由于方程（2）是一个超越方程，引理1的条件不易验证．为此，类似于文〔1〕的引理1，我们给出

引理2　方程（1）为无条件稳定[4]（即对任何$\tau>0$方程（1）的零解均为渐近稳定）当且仅当（i）方程（4）的根均位于复平面左半部；（ii）对任何$\tau>0$方程（5）均无实根．

注意1．条件（i）可用Routh-Hurwitz 条件验证．

注意2．由方程（5）推知 $|f(iy)|=|g(iy)|$，　（7）

即有
$$f_1^2(y)+f_2^2(y)=g_1^2(y)+g_2^2(y)\ . \tag{8}$$

方程（8）两边均为多项式，因此，我们有如下代数判据．

* 1985年1月19日收到．

定理 1 方程（1）为无条件稳定当且仅当（i）方程（4）的根均位于复平面左半部；（ii）方程（8）无实根．

例 1 考虑二阶中立型方程

$$x''(t)+Ax'(t)+Bx(t)+Cx''(t-\tau)=0 \tag{9}$$

其特征方程为 $\lambda^2+A\lambda+B+C\lambda^2e^{-\lambda\tau}=0$，条件（i）即 $A(1+C)>0$, $B(1+C)>0$．方程（8）化为

$$(1-C^2)y^4-(A^2-2B)y^2+B^2=0, \tag{10}$$

故有

$$y^2=\frac{-(A^2-2B)\pm\sqrt{(A^2-2B)^2-4B^2(1-C^2)}}{2(1-C^2)}. \tag{11}$$

因此，条件（ii）即为下例两条件之一成立：

$|C|<1$, $A^2-2B\geqslant 0$，或 $|C|<1$，$A^2-2B<0$，$(A^2-2B)^2-4B^2(1-C^2)<0$.

推论 1 方程（9）为无条件稳定当且仅当 $A>0$, $B>0$, $|C|<1$ 且下列两条件之一成立：

（i）$A^2-2B\geqslant 0$；（ii）$A^2-2B<0$，$(A^2-2B)^2-4B^2(1-C^2)<0$．

如果定理 1 的条件（i）满足，而条件（ii）不满足，即存在某一 $\tau_0>0$ 方程（5）(即方程（8））有实根，此时方程（1）谁不是无条件稳定，但类似于文〔1〕的定理 2，我们有

定理 2 若方程（1）的零解当 $\tau=0$ 时为渐近稳定，则当 $0<\tau<\tau_0$ 时方程（1）的零解仍为渐近稳定。

注意 3．定理 2 中 τ_0 的求法，只须将（6）及等式 $e^{-iy\tau}=\cos y\tau-i\sin y\tau$ 代入方程（5），分开实部和虚部可得方程组

$$f_1(y)+g_1(y)\cos y\tau+g_2(y)\sin y\tau=0,\quad f_2(y)+g_2(y)\cos y\tau-g_1(y)\sin y\tau=0.$$

解此方程组即得

$$\tau_0=\frac{1}{y}\cos^{-1}\left(-\frac{f_1(y)g_1(y)+f_2(y)g_2(y)}{g_1^2(y)+g_2^2(y)}\right) \tag{12}$$

其中 y 可由方程（8）解出．

例 2 求方程（9）的滞量上限 τ_0

此时 $f_1(y)=B-y^2$, $f_2(y)=Ay$, $g_1(y)=-Cy^2$, $g_2(y)=0$． (13)

方程（8）化为方程（10）．由（12）和（13）得

$$\tau_0=\frac{1}{y}\cos^{-1}\frac{B-y^2}{Cy^2}$$ 式中 y 由（11）给出．

参 考 文 献

〔1〕俞元洪，超越函数 $\mathrm{Det}(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-f_{ij}\lambda)_{n\times n}$ 的零点全分布在复平面左半部的代数判定，科学通报29（1984）23：1413—1415．

〔2〕罗来汉，The Asymptotic stability of Neutral Differential Difference Equation $\frac{d}{dt}(x(t)-Cx(t-\tau))=Ax(t)+Bx(t-\tau)$，数学研究与评论，4（1984）4，113—114．

〔3〕Bellman.R.and Cooke.k.L., Differential-Difference Equations, Academic Press, New York, 1963.

〔4〕秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，北京，1963．