1986年5月

数学研究与评论
第六卷 第二期

单元及多元函数关于多点的一种插值多项式及其余项*

熊 振 翔

（北京航空学院）

将［1］中所推广的Lidstone多项式的定义略加修改如下：

设 $0=a_0<a_1<\cdots<a_k=1$，在这 $k+1$ 个点 a_i 上的Lidstone多项式 $L_{l,r}(x)$ $(l=0,1,\cdots;r=0,1,\cdots,k)$ 定义为

$L_{0,r}(x)$ 是 k 次多项式，满足 $L_{o,r}(a_i)=\delta_{o,r}$，$i=0,1,\cdots,k$

$L_{l,r}^{(k+1)}(x)=L_{l-1,r}(x)$，且 $L_{l,r}(a_i)=0$，$l\geqslant 1$，$i=0,1,\cdots,k$.

由定义可知

$$L_{o,r}(x)=\frac{1}{w'(a_r)}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{k}(x-a_i),\quad w(x)=\prod_{i=0}^{k}(x-a_i) \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{k}L_{o,r}(x)\equiv 1 \tag{2}$$

$$\sum_{r=0}^{k}L_{1,r}(x)=\frac{1}{(k+1)!}w(x) \tag{3}$$

$L_{l,r}(x)$ 是 $lk+l+k$ 次多项式，当 $l\geqslant 1$ 时，会有因子 $w(x)$.

当 $k=0$ 时，$L_{0,0}(x)=1$，$L_{l,0}(x)=\dfrac{x^l}{l!}$ $(l\geqslant 1)$

称
$$p_{nk+n}(x)=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}f^{(lk+l)}(a_i)\,L_{e,i}(x) \tag{4}$$

为 $f(x)$ 关于点 a_0、a_1、$\cdots a_k$ 的 $nk+n-1$ 次插值多项式，它满足

$$P_{nk+n}^{(lk+l)}(a_i)=f^{(lk+l)}(a_i),\ l=0,1,\cdots,n-1;\ i=0,1,\cdots,k. \tag{5}$$

定理1 设 $f(x)\in C^{nk+n}[0,1]$，则

$$f(x)=P_{nk+n}(x)+f^{(nk+n)}(\xi_n)\frac{1}{[(k+1)!]^n}\prod_{j=0}^{n-1}w(\xi_j) \tag{6}$$

其中 $\xi_0=x\in[0,1]$, $0<\xi_j<1$，$j=1,2,\cdots,n$；且 $\xi_j\neq a_i$ $(i=1,\cdots,k-1)$

令 $h=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k-1}(a_{i+1}-a_i)$

$$\left|f^{(nk+n)}(\xi_n)\frac{1}{[(k+1)!]^n}\prod_{j=0}^{n-1}w(\xi_j)\right|<\begin{cases}\|f^{(nk+n)}\|\dfrac{h^{kn}}{[(k+1)!]^n2^{kn}}, & \text{（当K为偶数）}\\[2ex] \|f^{(nk+n)}\|\dfrac{h^{(k+1)n}}{[(k+1)!]^n2^{(k+1)n}} & \text{（当K为奇数）}\end{cases}$$

对于任意区间 $[a,b]$，取分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_k$

定理2：若 $f(t)\in C^{nk+n}[a,b]$，则

* 1984年8月20日收到。

$$f(t)=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} f^{(lk+l)}(t_i)L_{l,i}\left(\frac{t-t_o}{t_k-t_0}\right)(t_k-t_o)^{lk+l}+\frac{f^{(nk+n)}(\xi_n)}{[(k+1)!]^n}\prod_{j=0}^{n-1}w(\xi_j) \tag{8}$$

其中$\xi_o=t\in[a,b]$, $a<\xi_j<b$, $(j=1,\cdots,n)$, $\xi_j\neq t_i\,(i=1,2,\cdots,k-1)$,

$w(t)=\prod_{i=0}^{k}(t-t_i)$.当$n=1$ 时，（8）化为$f(t)$ 关于t_0、t_1、…、t_k的Lagrange插值多项式及插值余项的和：

$$f(t)=\sum_{i=0}^{k}f(t_i)\frac{1}{w'(t_i)}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(t-t_j)+f^{(k+1)}(\xi)\frac{w(t)}{(k+1)!} \tag{9}$$

当$k=1$ 时，（8）即为$f(t)$ 在区间$[t_0, t_k]$上关于两点插值的展开式

$$f(t)=\sum_{l=0}^{n-1}\left[f^{(2l)}(t_0)\,L_{l,0}\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)+f^{(2l)}(t_1)\,L_{l,1}\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\right](t_1-t_0)^{2l}+$$

$$+\frac{f^{(2n)}(\xi_n)}{(2!)^n}\prod_{j=0}^{n-1}w(\xi_j) \tag{10}$$

这里$w(t)=t(1-t)$,此式即相当于［2］中的（26）式．当$k=0$ 时，（8）即化为

$$f(t)=\sum_{l=0}^{n-1}f^{(l)}(t_0)\frac{(t-t_0)^l}{l!}+f^{(n)}(\xi_n)\prod_{j=0}^{n-1}(\xi_j-t_0),\quad \xi_0=t,\quad \xi_j\in(t_0,t),\quad j\geqslant 1$$ 因此

$\xi_j=t_0+\theta_j(t-t_0)$, $0<\theta_j<1$, $j=1,2,\cdots,n$. 故得

$$f(t)=\sum_{l=0}^{n-1}f^{(l)}(t_0)\frac{(t-t_0)^l}{l!}+f^{(n)}(t_0+\theta_n(t-t_0))\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}(t-t_0)^n \tag{11}$$

这就是$f(t)$ 在t_0处的台劳公式，余项的形式略有不同。

设域D$=[0,1]\times[0,1]$ 按 $0=x_0<x_1<\cdots<x_k=1$；$0=y_0<y_1<\cdots<y_s=1$ 划分为ks个小矩形。则称

$$Q(x,y)=\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{s}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial^{lk+l+rs+r}}{\partial^{lk+l}\partial y^{rs+r}}f(x_i,y_j)\,L_{l,i}(x)\,L_{r,j}(y) \tag{12}$$

为$f(x,y)$ 在D上关于点$(x_i,y_j)(i=0,1,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,s)$ 的$(mk+ns+m+n-2)$次插值多项式。

定理3：设$f(x,y)\in C^{mk+m,ns+n}[D]$，则 $f(x,y)=Q(x,y)+R_{m,n}(x,y)$ （13）

其中

$$R_{m,n}(x,y)=\frac{\partial^{mk+m}}{\partial x^{mk+m}}f(\xi_m,y)\frac{\prod_{i=0}^{m-1}w(\xi_i)}{[(k+1)!]^m}+\frac{\partial^{ns+n}}{\partial y^{ns+n}}f(x,\eta_n)\frac{\prod_{j=0}^{n-1}w(\eta_j)}{[(s+1)!]^n}$$

$$-\frac{\partial^{mk+m+ns+n}}{\partial x^{mk+m}\partial y^{ns+n}}f(\xi_m,\eta_n)\frac{\prod_{i=0}^{m-1}w(\xi_i)\prod_{j=0}^{n-1}w(\eta_j)}{[(k+1)!]^m[(s+1)!]^n} \tag{14}$$

$(x,y)\in D$, $\xi_0=x$, $\xi_i\in(x_0,x_k)$, $i=1,2,\cdots,m$; $\xi_i\neq x_l$, $(l=1,\cdots,k-1)$
$\eta=y$, $\eta_j\in(y_0,y_s)$, $j=1,2,\cdots,n$, $\eta_j\neq y_r$, $(r=1,\cdots,s-1)$

（13）可推广到任意矩形域上，也可推广到任意多元函数。

参 考 文 献

［1］向晓京，函数在多点的Lidstone级数展开，（已投《应用数学学报》）
［2］熊振翔，函数序列$\{f_{rj+1}(t)\}$及$\{g_{rj+1}(t)\}$的一致收敛性，《计算数学》2（1981）