1985年5月

数学研究与评论
第六卷　第二期

平面图的理论与四色问题（V）——四色问题的计算机解决途径*

刘彦佩

（中国科学院应用数学研究所）

§21　可　约　性[1-11]

这里只讨论4—可约性。首先，推广§7中的概念。一个构形R称为可约，如果任一平面图G，$R\subseteq G$，的4—着色均可由某小于G的平面图G'的4—着色导出。之谓G'小于G，记$G'<G$，即$\nu'\leqslant\nu$，$\varepsilon'\leqslant\varepsilon$且至少一个为严格的。$\nu$、$\nu'$；$\varepsilon$，$\varepsilon'$分别为$G$，$G'$的节点数与边数。注意$G'$不一定是G的子图。

假若四色定理非真，则必有5—色平面图。从而，有极小5—色平面图，即无任何真子图为5—可着色。可见，凡含有可约构形的平面图均非极小5—色平面图。因此，能否发现5—色平面图取决于对可约构形的研究。

命题21.1　凡极小5—色平面图皆极大平面图。

证明：若G中有一面f非三角形，则在$B(f)$上有二节点u，v不相邻。将u，v合而为一得图$G(u,v)<G$，则由$G(u,v)$的4—着色即得G的4—着色。

命题21.1　凡极小5—色平面图皆无由四个节点组成的极小分离集。

证明：设$S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$为G的分离集。记$G=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=G[S]$。由极小性和命题4.3，$G[S]=C_4$，即长度为4的圈。取$C_4=(v_1v_2v_3v_4)$，则从$G_i(v_1\cdot v_3)(v_2\cdot v_4)$，$i=1,2$，的4—着色可合并为$G$的4—着色。

推论21.1　凡极小5—色平面图皆5—连通。

证明：由命题13.6和命题21.2，即得。

定理21.1　平面图中次为5的节点，长度大于3的面边界，和长度小于5的分离圈均为可约构形。

证明：由命题7.4，命题13.6，和推论21.1，以及命题21.1，即得。

由此，只需研究无定理21.1中所述可约构形的平面图。称之为常规图

命题21.3　在任常规图G中，$C_5=C$使得$C_{in}\cap G$和$C_{out}\cap G$均至少含G中二节点为可约构形。

证明：令$C=(v_1v_2v_3v_4v_5)$，和记$G_1=(C_{in}\cap G)\cup C$，$G_2=(C_{out}\cap G)\cup C$。由$G_i$的4—着色得$C$上的4—着色，据命题7.3，只需考虑$C$上的3—着色$\psi_i(c)$，$i=1$，2。用$m(\psi_i)$表示$C$上具孤立色的节点。若$m(\psi_1)=m(\psi_2)$，则至多在$G_1$上通过一个色置换即可将$G_1$，$G_2$的4—着色合并成$G$的4—着色。

当$m(\psi_1)\neq m(\psi_2)$且二者不相邻时，如$\psi_1(C)=(r,\alpha,\beta,\alpha,\beta)$，$\psi_2(C)=(\alpha,\beta,r,\alpha,$

* 1984年8月20日收到，本文（IV）刊于本刊第五卷第三期。

β)，若在G_2上，$v_5 \in K_{v_3}(\gamma,\beta)$，则交换此链上二色得$\psi_2'$有$m(\psi_1)$ 与$m(\psi_2')$ 相邻。否则，$v_1 \in K_{v_4}(\alpha,\delta)$，交换二色得$\psi_2''$: $\psi_2''(C)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\beta)$ 。这时，考虑$G_1(v_2,v_5)$ 的 4—着色$\psi_{2,5}(C)=(x,\beta,y,z,\beta)$。不妨设$y=\gamma$，$z=\delta$。从而，只有如下三个着色形式：

$$\mathrm{I}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\beta),\quad \mathrm{II}=(\gamma,\beta,\gamma,\delta,\beta),\quad \mathrm{III}=(\delta,\beta,\gamma,\delta,\beta)。$$

然，$I=\psi_2'(C)$，$m(\mathrm{II})=v_4$与$m(\psi_2)=v_3$相邻，和$m(\mathrm{III})=m(\psi_2)$ 。

只需研究$m(\psi_1)\neq m(\psi_2)$ 且二者相邻的情况。如$\psi_1(C)=(\gamma,\alpha,\beta,\alpha,\beta)$，$\psi_2(C)=(\beta,\gamma,\alpha,\beta,\alpha)$。若在$G_2$中，$v_4 \in K_{v_2}(\gamma,\beta)$，则交换二色得$\psi_2'=m(\psi_1)$。否则，交换$K_{v_3}(\alpha,\delta)$上二色得$\psi_2''(C)=(\beta,\gamma,\delta,\beta,\alpha)$。这时，又可由$G_1(v_1 \cdot v_4)$ 的 4—着色$\psi_{1.4}$得$\psi_{1.4}(C)=(\beta,x,y,\beta,z)$。亦可设$x=\gamma$，$y=\delta$。有

$$\mathrm{I}=(\beta,\gamma,\delta,\beta,\alpha),\quad \mathrm{II}=(\beta,\gamma,\delta,\beta,\gamma),\quad \mathrm{III}=(\beta,\gamma,\delta,\beta,\delta)。$$

然，$I=\psi_2''(C)$，$m(\mathrm{III})=m(\psi_2)$，和$m(\mathrm{III})=v_3$与$m(\psi_2)=v_2$相邻。如此递推可得$G_2$上 4—着色$\widetilde{\psi_2}$使$m(\widetilde{\psi_2})=v_4$与$v_3$相邻，和$G_1$上的$\widetilde{\psi_1}$，$m(\widetilde{\psi_1})=v_5$与$v_4$相邻，最后得$G_2$上的 4—着色$\widetilde{\widetilde{\psi_2}}$，$m(\widetilde{\widetilde{\psi_2}})=v_1=m(\psi_1)$ 。

一般而论，检查构形的可约性是相当复杂的。因此，缩小如上所定义的可约性的范围。

令C为一圈。对给定的某C内平面图$G_{in}(C)$，讨论由任C外平面图$G_{out}(C)$ 与它并成的图$G=G_{in}(C)\cup G_{out}(C)$ 。设$\psi(C)$ 为C上的一个 4—着色，若对某$G_{out}(C)(G_{in}(C))$，有一4—着色使得在C上即$\psi(C)$，则称$\psi(C)$ 为$G_{out}(C)(G_{in}(C))$—可延拓。设这个 4—着色称为$\psi(C)$ 的$G_{out}(C)(G_{in}(C))$—延拓。设$\Gamma(C)$ 为C上 4—着色的一个集合，对C上任一 4—着色$\psi(C)$ ，若$\psi(C)$ 为$G_{out}(C)$ —可延拓且任经过$G_{out}(C)$ 中Kempe链上二色交换所得的 4—着色均为$\Gamma(C)$ 的某成员的$G_{out}(C)$ —延拓，则称$\psi(C)$ 为$G_{out}(C)$ —可浸入$\Gamma(C)$ 。进而，若$\psi(C)$ 对所有使得$\psi(C)$ 为$G_{out}(C)$ —可延拓的$G_{out}(C)$ ，$\psi(C)$ 皆$G_{out}(C)$ —可浸入$\Gamma(C)$ 则称$\psi(C)$ 可浸入 $\Gamma(C)$ 。若记$\Gamma(C)$ 为$G_{in}(C)$ —可延拓的C上 4—着色的集合。自然，任$\psi(C)\in\Gamma(C)$ 皆可浸入$\Gamma(C)$ 。如果C的所有 4—着色皆可浸入$\Gamma(C)$ ，则称构形$G_{in}(C)$ 为K—可约。

命题21.4 若$G_{in}(C)$ 为K—可约，则$G_{in}(C)$ 亦可约。

证明：设$G=G_{in}(C)\cup G_{out}(C)$ ，且ψ为$G_{out}(C)$ 上的一个 4—着色。由$G_{in}(C)$ 为K—可约，ψ经$G_{out}(C)$ 中Kepe 链上色交换可得ψ'使$\psi'(C)$ 为$G_{in}(C)$ —可延拓。从而，即可得到G上的 4—着色。

在判定一个构形$G_{in}(C)$ 是否可约时，所谓约化子的发现是非常重要的。即，发现对$G_{in}(C)$，或对$G_{in}(C)$—$G\cap C_{in}$作何运算使G变为G'，$G'<G$，以便可由G'的 4—着色，或直接或间接（经Kempe链上的色交换），导致G的 4—着色。

命题21.5 若C为常规图G中的一个极小分离圈，且C由一个偶长的次为 5 的节点的叙列和一个或二个相邻任意次的节点所组成，则C是可约的。

证明：设$C=(v_1 v_2 \cdots v_{2s} u_1)$ 或 $(v_1 v_2 \cdots v_{2s} u_1 u_2)$ ，$\rho(v_i)=5$ ，$i=1,2,\cdots,2s$。由G为极大平面图，可令a_{2r-1}，b_{2r-1}同与v_{2r-1}，v_{2r}相邻，$1\leqslant r\leqslant s$。将a_{2r-1}，v_{2r-1}，b_{2r-1}压缩为一个节点，但注意，当$C=(v_1 v_2 \cdots v_{2s} u_1)$ ，且在压缩后的图中v_{2s-2}与u_1同色时，改压缩a_{2s-1}，v_{2s-1} b_{2s-1}为压缩u_1，v_{2s}，a到一个节点。其中，a为与v_{2s}，v_{2s-1}同相邻的节点。如此即可由压缩后图的 4—着色直接导致G的 4—着色。

下面，再列几个可约构形。限于篇幅不作证明。

定理21.2 一个次为5的节点，在它的相邻节点中有三个相继的次依次为5，6，5是可约的。

定理21.3 一个次为5的节点，在它的相邻节点中有三个相继的次皆为5是可约的。

定理21.4 一个次为5的节点，其所有相邻节点的次均不超过6是可约的。

定理21.5一个次为6的节点，在它的相邻节点中有三个相继的次依次为5，5，5；或5，6，5是可约的。

定理21.6 一个次为6的节点，其所有相邻节点的次均不超过6是可约的。

定理21.7 一个次为7的节点，在它的相邻节点中有4个相继的次依次为5，6，5，5是可约的。

定理21.8 一个次为7的节点，在它的相邻节点中有4个相继的次皆为5是可约的。

定理21.9 一个次为7的节点有4个次为5的，3个次为6的节点与它相邻是可约的。

§22 不可免构形的完备集[12、14、15、21]

所谓构形的不可免的完备集，系指这样的构形的一个集合使得任一平面图都有一个子图与这个集合中某构形同构。

由定理6.1 的对偶，可知

$$\mathscr{U}_0=\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}\ ,$$

其中，A_i为一个次为$i+1$ 的节点和与之关联的$i+1$ 条边所形成的构形，$i=1$，2，3，4，是一个不可免构形的完备集。

记$\mathscr{R}$为所有可约构形的集合，$\mathscr{U}$为构形的不可免的完备集。

定理22.1若$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{R}$，则任何平面图皆4—可着色。

证明：因为对于小的平面图易验证皆4—可着色。又，对任何一个平面图G，若所有比G小的平面图皆4—可着色，由$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{R}$，则存在一个构形$R\in\mathscr{U}\cap\mathscr{R}$。然，由$R$的可约性，则$G$的4—着色可由某$G'<G$的4—着色得到。

可惜，$\mathscr{U}_0\nsubseteq\mathscr{R}$。实际上，如§7中所述，$A_1$，$A_2$，$A_3\in\mathscr{R}$。而，$A_4$是5—可约，不能证明为4—可约，即这里的可约。然，可以证明A_4非D—可约（推论24.1）。这就是Kempe“证明”四色定理的错误所在。

确定构形的不可免的完备集的理论基础就是Euler公式。这方面的第一个成果是Kempe取得的。即$\mathscr{U}_0$ 。

进而，定理22.1还可用来估计N使得凡节点数不超过N的平面图都有四色定理。记$\mathscr{U}(N)$为所有节点数不超过N的平面图的不可免构形的完备集。可见，随着N的增大，一般而论，$\mathscr{U}(N)$中的元素随之增多。

推论22.1 若$\mathscr{U}(N)\subseteq\mathscr{R}$，则所有节点数不超过$N$的平面图皆4—可着色。

证明：与定理22.1的证明相仿。

基于这个思想，研究估计N的问题。仅取$N=27$为例。如上节所述，只需考虑常规图中的不可免构形的完备集。

记k_i表次为i的节点的数目。则对于常规图，由Euler公式（§6），有

$$\sum_{i\geq 5}(6-i)k_i=12 \tag{22.1}$$

若令$\mathrm{ch}(v)=\rho(v)-6$，则 $\sum_{v\in V}\mathrm{ch}(v)=-12$ (22.2)

和定义节点 $v\in V$的值$\sigma(v)$ 为 $\sigma(v)=\sum_{u\in V_v}\mathrm{zh}(u)$. (22.3)

其中

$$\mathrm{zh}(u)=\begin{cases} ch(u), & \rho(u)\leqslant 7; \\ 1, & \rho(u)>7. \end{cases}$$

从而，有（为方便，记$\mathrm{ch}(i)=\mathrm{ch}(v)$，$\rho(v)=i$）

$$\sum=\sum_{v\in V}\sigma(v)=\sum_{i=5,6}i\mathrm{ch}(i)k_i+\sum_{i\geq 7}ik_i$$
$$=-5k_5+7k_7+\cdots+ik_i+\cdots \tag{22.4}$$

将（22.1）的二边同乘7，得

$$84=7k_5-7k_7-14k_8-21k_9-\cdots \tag{22.5}$$

然，若只讨论节点数小于28的情况，即

$$-28<-\sum_{i\geq 5}k_i,$$
$$-84<-3k_5-3k_6-3k_7-\cdots \tag{22.6}$$

把（22.4），（22.5），和（22.6）加起来，得

$$\sum<-k_5-3k_6+\sum_{i\geq 7}(39-6i)k_i \tag{22.7}$$

定理22.2 任何节点数小于28的平面图皆4—可着色。

证明：从（22.7），当$i\geqslant 8$，有$-(39-6i)>i$，和不可能有次为i的节点其值小于$-i$。故，只能有如下三种情况。用$W_5(2(5),3(6))$表示一个5—轮图其外圈上的节点有2个次为5，有3个次为6。5：556 表示一个次为5的节点在其相邻节点中有三个相继的次依次为5，6，5这样的构形。$\times_7$表节点的次至少为7。

Ⅰ，v，$\rho(v)=5$，且$\sigma(v)<-1$：

$\sigma(v)=-2$，$W_5(2(5),3(6))\supset 5:55666$，或5：565；

$W_5(3(5),1(6),1(\times_7))\supset 5:565$，或5：555。

$\sigma(v)=-3$，$W_5(3(5),2(6))\supset 5:555$，或5：565。

$\sigma(v)=-4$，$W_5(4(5),1(6))\supset 5:555$。

$\sigma(v)=-5$，$W_5(5(5))\supset 5:555$。

Ⅱ，v，$\rho(v)=6$，$\sigma(v)<3$：

$\sigma(v)=-4$，$W_6(4(5),2(6))\supset 6:565$，或5：565；

$W_6(5(5),1(\times_7))\supset 5:565$。

$\sigma(v)=-5$，$W_6(5(5),1(6))\supset 5:565$。

$\sigma(v)=-6$，$W_6(6(5))\supset 5:565$。

Ⅲ，v，$\rho(v)=7$，$\sigma(v)<-3$：

$\sigma(v)=-4$，$W_7(4(5)，3(6))\supset 7：4(5)\ 3(6)$；

$W_7(5(5)，1(6)，1(\times_7))\supset 7：5555$，或 $7：5655$。

$\sigma(v)=-5$，$W_7(5(5)，2(6))\supset 7：5555$，或 $7：5655$；

$W_7(6(5)，1(\times_7))\supset 7：5555$。

$\sigma(v)=-6$，$W_7(6(5)，1(6))\supset 7：5555$。

$\sigma(v)=-7$，$W_7(7(5))\supset 7：5555$。

由此可得，

$\mathscr{U}27)=\{5：55666；5：565；5：555；6：565；7：5655；7：4(5)\ 3(6)\}$。

又，由定理21.2—9，$\mathscr{U}(27)$ 中所有元素皆可约。故，由推论22.1，直接可得。

推而广之，对所有节点数不超过$N=X-1$，

即小于X，

$$-X<-k_5-k_6-\cdots-k_i-\cdots, \tag{22.8}$$

的常规图确定不可免构形的完备集（N）。

为方便，令

$$x=\frac{-4X}{12-X}，y=\frac{-48}{12-X}。$$

由（22.4）+x(22.1)+y(22.8)，　可得

$$\sum<-k_5-yk_6-(x+y-7)\ k_7-\sum_{i\geq 8}\ (i+x(6-i)-y)\ k_i$$

从而，只需讨论存在$v\in V$，$5\leqslant\rho(v)\leqslant F(X)$，

$$F(X)=\left[\frac{12X-24}{X+12}\right]，$$

$\sigma(v)$ 小于$k_{\rho(v)}$的系数的几种情况即足。

当$N\to\infty$时，有

$$\sum<-k_5+3k_7-3k_9-6k_{10}-9k_{11}-12k_{12}+\cdots$$

从而，亦可确定所有平面图的不可免构形的完备集。

§23　负荷转移过程[16—24]

为方便，常记 i 表示$\rho(v_i)=i$的节点。两个次为 5 的节点相邻，即 5—5，亦可视为连二次为 5 节点的边。

关于所有平面图的不可免构形的完备集，除Kempe的$\mathscr{U}_0=\{2，3，4，5\}$外，较早期的还有：

$\mathscr{U}_1=\{2，3，4，5—5，5—6\}$(Wernicke)；

$\mathscr{U}_2=\{2，3，4，5—5，5：66，5：6\ |6\}$(Franklin)，

其中$5：6\ |6$，即$5：6x6$，$x\geqslant 5$；

$\mathscr{U}_3=\{2，3，4，5—5，5：66，5：676\}$(Lebesgue)。

然，在这方面，Heesch的工作确开僻了用计算机求构形的不可免的完备集的新方面。这就是，将

$$\mathscr{E}_{\xi_0}(u, v,\cdots)=\sum_{v\in V}\xi_0(v)\ v=\sum_{v\in V}(6-\rho(v))\ v \tag{23.1}$$

中$\xi_0(v)=\frac{\partial\quad\xi_0}{2v}(6-\rho(v))$ 视为节点v上的负荷，特别地，电荷。在图上，建立一个所谓负荷转移过程。即，在某预先给定的规则，称之为放电规则之下使次为5的节点上的正电荷部分或全部地移到其他次的节点，通常是次至少为7的相邻节点上。例如，取放电规则为将每个次为5的节点上的电荷平均分配给V_5中次至少为7的节点上。即将 $\xi_0(u, v,\cdots)$变为

$$\mathscr{G}_{\xi_0}(u,\ v,\cdots)=\sum_{v\in V}\xi_1(v)\ v$$

其中，

$$\xi_1(v)=\begin{cases}0, & \text{当}\rho(v)=5;\\ \xi_0(v), & \text{当}\rho(v)=6;\\ \xi_0(v)+\sum\limits_{\substack{u\ \mathrm{adj}\ v\\ \rho(u)=5}}\frac{1}{w(u)}, & \text{当}\rho(v)\geqslant 7,\end{cases}\qquad(23.2)$$

$w(u)$ 为V_u中次至少为7的节点的数目。

记 $\left|\mathscr{G}_{\xi_i}(u,\ v,\cdots)\right|=\sum_{v\in V}\xi_i(v)$，$i=0$，1。

命题23.1

$$\left|\mathscr{G}_{\xi_0}(u,\ v,\cdots)\right|=\left|\mathscr{G}_{\xi_1}(u,\ v,\cdots)\right|=12.\qquad(23.3)$$

证明：由公式（22.1），即得。

一个构形的集合$\mathscr{U}$，若对任一任不含$\mathscr{W}$中任何构形的平面图，存在负荷转移过程：$\xi_0\to\xi_1$，
使得

$$\xi_1(v)\leqslant 0,\ v\in V\qquad(23.4)$$

则称这个平面图对$\mathscr{W}$可完全放电。

命题23.2 一个构形的集合$\mathscr{W}$，若任何不含$\mathscr{W}$中构形的平面图对$\mathscr{W}$均可完全放电，则$\mathscr{W}$为所有平面图的一个不可免构形的完备集。

证明：若$\mathscr{W}$非不可免的完备集，则存在一个平面图G不含$\mathscr{W}$中的构形。从而，在G上，对任何负荷转移过程：$\xi_0\to\xi_1$，均有（23.3）。然，这时总有$v\in V$使得$\xi_1(v)>0$。即，G对$\mathscr{W}$不可完全放电。

基于这个命题就使得检查一个构形的集合是否为不可免的完备集变得容易，特别是利用电子计算机。

定理23.1 $\mathscr{U}_2\cap\mathscr{U}_3=\mathscr{U}_{2,3}$为不可免的完备集。

证明：设H为不含$\mathscr{U}_{2,3}$中任何构形的平面图。可建立一个负荷转移过程：$\xi_0\to\xi_1$，如（23.2）所示。这时，由于每个次为5的节点u至少与3个次至少为7的节点相邻。即$w(u)\geqslant 3$。和，每个次至少为7的节点v至多与3个次为5的相邻。故

$$\sum_{\substack{u\ \mathrm{adj}\ v\\ \rho(u)=5}}\frac{1}{w(u)}\leqslant 3\times\frac{1}{3}=1\qquad(23.5)$$

即，$\xi_1(v)\leqslant 0$，$v\in V$。由命题23.2，即得。

至此，为了证明四色定理可按如下的递推过程。设已得到了不可免的完备集$\mathscr{U}_k=\mathscr{A}_k+\mathscr{U}_{\mathscr{A}_k}$其中，$\mathscr{A}_k$为$\mathscr{U}_k$中所有可约构形的集合。自然，$\mathscr{U}_{\mathscr{A}_k}$为所有不含$\mathscr{A}_k$中构形的平面图的一个不可免的完备集。修改$\mathscr{U}_{\mathscr{A}_k}$为$\mathscr{U}'_{\mathscr{A}_k}$使得仍为不含$\mathscr{A}_k$中构形的平面图的不可免的完备集，且

含尽可能多的可约构形。记$\mathscr{U}'_{\mathscr{A}_k}=\mathscr{A}'_k+\mathscr{U}_{\mathscr{A}'_{k+1}}$。其中$\mathscr{A}'$为$\mathscr{U}'_{\mathscr{A}_k}$中所有可约构形的集合。取

$$\mathscr{U}_{k+1}=\mathscr{A}_{k+1}+\mathscr{U}_{\mathscr{A}_{k+1}},\quad \mathscr{A}_{k+1}=\mathscr{A}_k+\mathscr{A}'_k \tag{23.6}$$

如果$\mathscr{U}_{\mathscr{A}_{k+1}}=\phi$，$\mathscr{U}_{k+1}$所为所求。四色定理得证；否则，以$k+1$ 为 k 继续推之。

沿此，Heesch曾求出一个竞达8000个构形的不可免的完备集。可惜，其中的构形不全是可约的。这里，有二个计算技巧很强的问题。一个是如何选择构形和怎样更有效地判断其可约性。另一个是放电规则的确定。前此将在下节扼要讨论。后此，基本上可分二类。一日*短程放电*，如（23.2），即沿边转移负荷。二日*跨边放电*，即将一个次为 5 的节点上的负荷转移到与此节点相对的 6 — 6 边的另一个相对节点。通常，次甚少为 7 。Appel和Haken的主要贡献就是在这些方面作了本质的改进使得现代的计算机可以胜任。这是他们证明四色定理主要工作量之所在。然，其中的许多计算经验，限于篇幅，只能从略。

另外，这里的方法亦可用来研究节点数不超过N的平面图的不可免的完备集。若一个负荷转移过程：$\xi_0\to\xi_1$，如（23.2），使得

$$\xi_1(v)\leqslant t,\quad 0<t<1,\ v\in V, \tag{23.7}$$

则称之为*漏电过程*。

命题23.3 对于一个构形的集合$\mathscr{V}$，若任何一个不含$\mathscr{V}$中构形的平面全有漏电过程，则$\mathscr{V}$为所有至少有$12t^{-1}$个节点的平面图的一个不可免的完备集。

证明：由（23.3），只能

$$12\leqslant\sum_{v\in V^+}\xi_1(v)<|V^+|t\leqslant|V|t,\ \text{即}\ |V|>12t^{-1}。$$

其中，$V^+=\{v\,|\,\xi_1(v)>0\}$。或者说，任何不含$\mathscr{V}$中构形的平面图至少需有$12t^{-1}+1$ 个节点。

由此，又可基于推论22.1，估计满足四色定理的平面图节点数的下界N。仅举一例。

记$\mathscr{V}_0=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}$，$B_1$为 5：555 或 6：555；$B_2$为一个次至少为 7 的节点其所有相邻节点除一个外次皆为 5；B_3为一个次为 5 的节点其所有相邻节点的次非 5 即 6 。

定理23.2 $\mathscr{V}_0$为所有节点数不超过25的平面图的一个不可免的完备集。

证明：在任一不含B_1，B_2，或B_3的平面图上，建立如下的漏电过程：令$v\in V$，$\rho(v)=5$

（i） 若V_v中至少有二个节点次不低于 7 ，则取

$$\xi_1(w)=\begin{cases}\xi_0(w)-\dfrac{2\times 26}{100}, & \text{当}w=v\ ;\\ \xi_0(w)+\dfrac{26}{100}, & \text{当}w=u_i\in V_v\text{且}\rho(u_i)\geqslant 7\ ,\ i=1\ ,\ 2\ ;\\ \xi_0(w)\ , & \text{其它}\end{cases}$$

（ii） 若V_v中只有一个次不低于 7 的节点。这时，由于不含B_1，V_v中恰有u_i，$\rho(u_i)=6$ ，$i=1$，2 。则取

$$\xi_1(w)=\begin{cases}\xi_0(w)-\dfrac{28}{100}-\dfrac{2\times 12}{100}, & \text{当}w=v\ ;\\ \xi_0(w)+\dfrac{28}{100}, & \text{当}w=u\in V_v,\ \rho(u)\geqslant 7\ ;\\ \xi_0(w)+\dfrac{12}{100}, & \text{当}w=u_i\in V_v,\ \rho(u_i)=6\ \text{。}i=1\ ,\ 2\ ;\\ \xi_0(w)\ , & \text{其他。}\end{cases}$$

然，对此，$t=\frac{48}{100}$。由命题23.3，$12\times\frac{100}{48}=25$，即得。

由定理21.8—6和命题21.5可知B_1，B_2，B_3皆可约。从而，由推论22.1，可得$N\geqslant 25$。

§24 计算机检查可约性[10, 11, 13, 25—26]

判定构形是否具K—可约性的困难在于：假若对四色$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$的一个2—等剖分如$(\alpha,\beta)/(\gamma,\delta)$，的任一Kempe链上作色交换，将会改变其他2—等剖分，$(\alpha,\gamma)/(\beta,\delta)$，$(\alpha,\delta)/(\beta,\gamma)$的Kempe链。这就导致理论上的麻烦使得数学家们至今未能解决。因此，要研究更特殊的可约性以避免上述困难利于实地运算。

如§23中所述，只考虑常规图，和对任一圈C，构形$G(C)$，即$G_{in}(C)$或$G_{out}(C)$，除以C为边界的面外皆三角形的情况。称之为近三角图。令$\psi(C)$为C上的一4—着色。$\Gamma(C)$为C上4—着色的一个集合。若对于某个四色的2—等剖分π，$\psi(C)$为$G(C)$—可延拓，且从$\psi(C)$的某$G(C)$—延拓可通过π的Kempe链上色交换变为$\Gamma(C)$中某成员的$G(C)$—延拓，则称$\psi(C)$可简单浸入$\Gamma(C)$。记$\psi(C)\propto\Gamma(C)$。取$h(\Gamma(C))=\{\psi|\psi\propto\Gamma(C)\}$，从而，$h^2(\Gamma(C))=h(h(\Gamma(C)))$，…。注意，每次浸入不一定对同一个2—等剖分。一个4—着色$\psi(C)$称为可天然浸入$\Gamma(C)$，记$\psi(C)$ $\Gamma(C)$，如果存在$k\geqslant 0$，$h^0(\Gamma(C))=\Gamma(C)$，使得$\psi(C)\propto h^k(\Gamma(C))$。

如果C的每一个4—着色皆可天然浸入$\Gamma(C)$，则称$\Gamma(C)$为支配着色集。进而，如果对于一构形$G_{in}(C)$，C的所有$G_{in}(C)$—可延拓的4—着色形成一个支配着色集，则称$G_{in}(C)$是P——可约的。

命题24.1 若$G_{in}(C)$为P—可约，则$G_{in}(C)$也为K—可约。

证明：由定义及下面的定理24.1，可得。

命题24.2 令$C_5=(u_1,\cdots,u_5)$为含5个节点的圈。$\Gamma(C)$为C的所有3—着色的集合。则$\Gamma(C)$非支配着色集。

证明：设$\psi(C)$为C的一恰4—着色。不妨取$\psi(C)=(\alpha,\beta,\alpha,\gamma,\delta)$。当$\pi=(\alpha,\beta)/(\gamma,\delta)$，不管怎样不能通过Kempe链上色交换得$C$的3—着色。当$\pi=(\alpha,\gamma)/(\beta,\delta)$，或$\pi=(\alpha,\delta)/(\beta,\gamma)$时，设$G(C)$中有边$(u_2,u_4)$，$(u_2,u_5)$，亦不能得$C$上的3—着色。

推论24.1 W_5，即5—轮图，非P可约。

命题24.3 令$C_5=(u_1,\cdots,u_5)$为含5个节点的圈。设$G(C)$为4—可着色，且C的任何3—着色均非$G(C)$—可延拓。则，C的每个恰4—着色皆$G(C)$—可延拓。

证明：不妨设，$\psi(C)=(\alpha,\beta,\alpha,\gamma,\delta)$。由于$C$的任3—着色皆非$G(C)$—可延拓，则在$G(C)$中有Kempe链$K_{u_2,u_5}(\beta,\delta)$。这样，可保留$\psi(u_1)=\alpha$而交换$K_{u_3,u_4}(\alpha,\gamma)$上二色。如此进行，由对称性可变到$C$上的任一恰4—着色

这个证明也是一个无需考虑Kempe链上交换色后对其他Kempe链的影响的一个典型实例。

令$\psi(C)$为C上的一4—着色，π为一2—等剖分。记$Z_\pi=Z_1+\cdots+Z_k$为对π的所有Kempe链的集合Z_π的一个剖分。若对任Z_i，$i=1,\cdots,k$，和C上的一条路L，其二端点不含在Z_i的任何Kempe链中但此二端点与Z_i相邻，均有Z_j，$j\neq i$，同含此二端点；和对任Z_i，Z_j，$i\neq j$ $v_1v_2\subseteq Z_i$，u_1，$u_2\subseteq Z_j$，均有v_1，v_2与u_1，u_2在C上沿循环次序不交错，则称之为Z_π的容许链剖分。对于任何2—等剖分π的C上4—着色的容许链剖分$Z_\pi=Z_1+\cdots+Z_k$，可造一个图$X(\pi)=$

(V_X, E_X)，$V_X=\{Z_i|i=1,\cdots,k\}$，$E_X=\{(Z_i, Z_j)\mid$ 存在$v\subset Z_i$, $u\subset Z_j$使得$(u, v\subset C\}$称$X(\pi)$为$\psi(C)$的色链分图。

命题24.4 $X(\pi)$为树。

证明：只要注意，若$(Z_i, Z_j)\in E_X$，则在C中恰有二边e_1，e_2连Z_i，Z_j且$C-\{e_1, e_2\}$不连通。记$C-\{e_1, e_2\}=P_1+P_2$，有$V(Z_i)\subset V(P_1)$，$V(Z_j)\subset V(P_2)$。从而，$X(\pi)$的边皆分离边。又，对任$e=(u, v)$，若不存在Z_j，$(u, v)\subset Z_j$，则必存在Z_i，Z_j使得$u\subset Z_i$, $v\subset Z_j$。故$X(\pi)$是连通的。

取$G(C)$为近三角图，$\psi(C)$为C上一4—着色，$\psi'(G)$为$\psi(C)$的$G(C)$—延拓，$K(x, y)$为$\psi(G)$的一个Kempe链，则称$K(x, y)\cap C$为Kempe剩余。由此，$Z_\pi=\sum K(x, y)\cap C$形成Z_π的一个容许链剖分。记其色链分图为$X'(\pi)$。反之，对C上任一4—着色$\psi(C)$，$X(\pi)$为其色链分图，总可构造一个近三角图$G(C)$使从$\psi(C)$的$G(C)$—延拓$\psi'(G)$可得$X'(\pi)=X(\pi)$。

令$\psi_1(C)$，$\psi_2(C)$为C上二4—着色，$X_1(\pi)$为$\psi_1(C)$的色链分图。若$\psi_1(C)$可通过V_{X_1}中一节点相应的所有Kempe链上交换二色得$\psi_2(C)$，则称$\psi_1(C)$可简单X_1—变换到$\psi_2(C)$。进而，若$\psi_2(C)$作一系列简单X_1—变换得到，则称$\psi_1(C)$为可X_1— $\psi_2(C)$。

定理24.1 令$\psi(C)$为C上一4—着色，$\Gamma(C)$为C上4—着色的一个集合。则$\psi(C)$可简单浸入$\Gamma(C)$，当且仅当存在四色的2—等剖分π使得$\psi(C)$对π的每个色链分图$X(\pi)$可X—变换到$\Gamma(C)$的某个成员。

这个定理对于判定构形的可约性是本质性的。因为，它可使考查无限多个$G(C)$的问题化为有限的。而这一点对于K—可约性未能如此。

由此，即可得确定C上一4—着色的集合是否为支配着色集的算法。从而，检查构形的P—可约性。

1 取$\psi(C)\in\Gamma(C)=h^0(\Gamma)$。记$J_1(\Psi)$，$J_2(\psi)$，$J_3(\psi)$分别为对于$\pi_1=(\alpha, \beta)/(\gamma\delta)$；$\pi_2=(\alpha, \gamma)/(\beta, \delta$；$\pi_3=(\alpha, \delta)/(\beta, \gamma)$的$\psi(C)$的所有色链分图的集合。

2 确定$J_i(\psi)$，$i=1$，2，3。

3 对所有$X\in J_1(\psi)$求出所有使得$\psi(C)$可X—变换到的4—着色$\widetilde{\psi}(C)$。

4 若对每个X有$\widetilde{\psi}(C)\in\Gamma(C)$，则令$\psi(C)\in h(\Gamma)$，定理24.1；否则，即所有$\widetilde{\psi}(C)\in\Gamma(C)$，继行下步。

5 将$J_1(\psi)$换为$J_2(\psi)$。进而，$J_3(\psi)$，重行3。

6 若$h(\Gamma)=\Gamma$则结束；否则，以$h(\Gamma)$代Γ再从1开始。

7 直到 $h^{k+1}(\Gamma)=h^k(\Gamma)$。这时，若$h^k(\Gamma)$为$C$上所有4—着色的集合，则$\Gamma$为支配着色集。

还有一种可约性在证明四色定理中起了重要作用。令$G(C)$为近三角图，若存在某$G'(C)<G(C)$使得每个C上$G'(C)$—可延拓的4—着色$\psi'(C)$皆$\psi'(C)\subset\Gamma(C)$，$\Gamma(C)$为C上$G(C)$—可延拓的4—着色的集合，则称$G(C)$是Q—可约。

命题24.5 若$G(C)$为Q—可约，则$G(C)$可约。

证明：由于对任$G=G(C)\cup G_0(C)>G'=G'(C)\cup G_0(C)$，若$G'$为4—可着色，则由$G'$的4—着色得$\psi'(C)\subset\Gamma(C)$。故通过Kempe链上的色交换可得$G$上的4—着色。即$G(C)$为

可约的。

经过对所得的可约构形的结构性质和不可免的完备集构成规律的定性研究，改进计算机的算法使之减少计算量和存储量。Appel和Haken终于在外圈长不超过14的可约构形中发现了一个不可免的完备集$\mathscr{U}$。其中含1936个可约构形。再经过化简，主要是将含有更小的可约构形的去掉，得$\mathscr{U}$由1834个可约构形组成。其中，外圈长不超过8的有7个；外圈长为9的8个；为10的35个；为11的89个；12的334 个；13的701 个；14的660 个。和，在1834中有504 个为Q—可约而非P—可约。所有这些构形全在〔25〕中列出。当然，用计算机检查这些构形的可约性是否无误，仍待进一步研究。

§25 可能性讨论

至此，可能要问：上述的四色定理的证明可信否？有多大把握可信，是否会整个推翻。自这自这个证明问世之后也的确发现些错误，但非本质。Appel和Haken 关于这类问题提供了一种解释。

下面，就从概率论的角度表明在外圈长n不超过17的可约构形中总会存在一个不可免的完备集而且很可能降到$n\leqslant 14$。但不可能再降到$n\leqslant 12$。从而，只有$n\leqslant 13$未能预测。实际的情形是$n\leqslant 14$。Moore发现了一个平面图，其中可约构形的外圈长至少为11。与这里的估计十分相近。

因为实际上所见到的可约性绝大部分为P—可约，有少部分Q—可约。故，只讨论P—可约。

对任一构形$G(C)$，记C的长度为n，C_{in}中节点的数目为m。C上4—着色的数目接近随长度的增加依3的比率增长。如$n=10$，为2,461；11，为7,381；12，为22,144；13，为66,430；14，为199,291；15，为597,871；…。

令$y=p\{G(C)$为D—可约$\}$，即$G(C)$为P—可约的概率。对于C上的一个4—着色$\psi(C)$，$x=p\{\psi(C)$为$G(C)$ —可延拓$\}$。和，对于四色的任一2—等剖分π，$q(\pi)$表示C上$\psi(C)$的Kempe链的数目。

引理25.1 若$\psi(C)$为$C=C_{13}$，即长为13的圈，上的一4—着色，则存在四色的一个2—等剖分π_1，使得$q(\pi_1)=10$，或12，且还有一个2—等剖分π_2，$q(\pi_2)\geqslant 8$。

证明：首先注意$2\leqslant q(\pi)\leqslant 12$，和$q(\pi)\equiv 0(\bmod 2)$，对任一$\pi$。记$\pi_0$为使$q(\pi_0)$最小的2—等剖分。当$q(\pi_0)=2$时，$q(\pi_i)\geqslant 13-2=11$。从而，$q(\pi_i)=12$，$i=1$，2；当$q(\pi_0)=4$，$q(\pi_i)\geqslant 13-4=9$。从而，$q(\pi_i)\geqslant 10$，$i=1$，2；相仿地，当$q(\pi_0)=6$，则$q(\pi_i)\geqslant 8$，$i=1$，2。然，这时，6个非$\pi_0$的Kempe链上的边，若有一个不分离$\pi_1$的二Kempe链，则必分离$\pi_2$的二Kempe链。又，至多有三个不分离$\pi_1$的Kempe链．故$q(\pi_1)\geqslant 13-3=10$；最后，若$q(\pi_0)=8$，总有$q(\pi_1)\geqslant 13-4=9$。从而，$q(\pi_1)\geqslant 10$。且就取$\pi_2=\pi$。

引理25.2 对于$C=C_{13}$上的一个4—着色$\psi(C)$，和一个四色的2—等剖分π，$q(\pi)=8$，有14个色链分图；$q(\pi)=10$，有42个；$q(\pi)=12$，有132个。

证明：仅以$q(\pi)=8$为例。注意到，这时的色链分图$X(\pi)$有$\frac{q(\pi)}{2}+1=5$个节点。由命题24.4，和只有三个不同构的树。对每个树讨论可能的$X(\pi)$即可得。

由于对于圈C上的一4—着色$\psi(C)$和一四色的2—等剖分π的$X(\pi)$，有$\frac{1}{2}q(\pi)+1$个节

点。故，有 $2^{2^{\frac{1}{2}q(\pi)+1}}$ 种 X—变换的方式。又，其中每一个 4 —着色，实际上，重复四次。故，有 $2^{2^{\frac{1}{2}q(\pi)-1}}$ 个不同的 4 —着色。C 上的一个 4 —着色 $\psi(C)$ ，如它可直接延拓到整个 $G(C)$ ，则称为佳着色。进而，若存在 2 —等剖分 π，$\psi(C)$ 对每个 $X(\pi)$ 均可 X—变换到一个佳着色，则称终极佳着色。若 $\psi(C)$ 非佳着色，则欲判断其是否为终极佳着色，需对于某 2 —等剖分 π 考查 $2^{2^{\frac{1}{2}q(\pi)-1}}-1$ 种不同的 X—变换。由 x 是 $\psi(C)$ 为佳着色的概率，则 $1-x$ 为 $\psi(C)$ 非佳着色的概率。从而，

$$p_{q(\pi)}=p\{\psi(C)\text{ 为终极佳着色/当}\psi(C)\text{ 非佳着色}\}=\prod_{X(\pi)}\left(1-(1-x)\right)^{t}\text{ ，}\ t=2^{2^{\frac{1}{2}q(\pi)-1}}-1 \tag{25.1}$$

由 § 24 中 P—可约性的检查过程，可得

$$y\geqslant x+(1-x)p_{q(\pi)} \tag{25.2}$$

以 $C=C_{13}$ 为例。由引理25.1—2，有

$$p_8=(1-(1-x)^{7})^{14};\ p_{10}=(1-(1-x)^{15})^{42};\ p_{12}=(1-(1-x)^{31})^{132}\text{。} \tag{25.3}$$

它们皆随 x 的增长而上升。如图25.1所示。就 p_{12} 而论，当 $x\leqslant 0.10$ 时 p_{12} 接近 0 。然，在 $0.10<x\leqslant 0.30$ 之间，一跃至接近 1 。

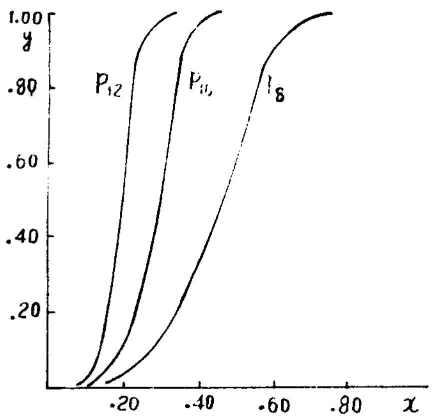

图25.1

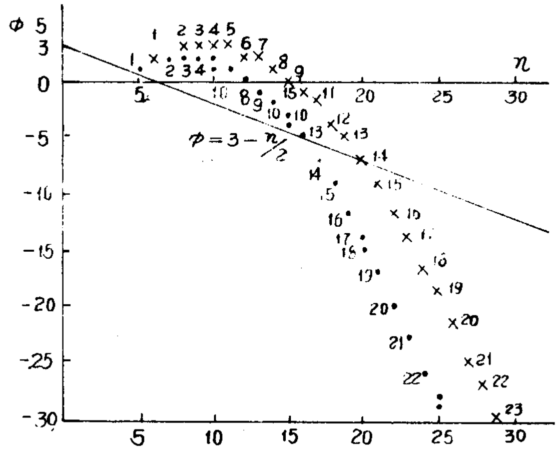

图25.2

由此，估计 y 决定于估计 x 。下面，在固定 n 之下，研究 x 与 $G(C)$ 的 C_{in} 中的节点数 m 的关系。对于 C 上的 4 —着色 $\psi(C)$ ，随 m 的增多，$\psi(C)$ 的 $G(C)$ —可延拓性增加。从而，存在一个临界值 m' 使得当 $m<m'$ 时，$G(C)$ “不似可约”；而，$m>m'$ 时，则 $G(C)$ “似可约”。当然，这里的可约绝大部分是 P—可约。实际上，Q—可约几乎不影响 m'。故，只考虑 P—可约性。从对 $n=6$ ，…，10的可约构形的调查，发现

$$m'=n-5\text{ 。} \tag{25.4}$$

所以，可将（25.4）外推到 $n\geqslant 12$。

Appel和Haken引进一个函数

$$\phi=n-m-3\text{ 。} \tag{25.5}$$

对于临界值 m'，将（25.4）代入得 $\phi'=2$ 。

引理25.3　对任一圈 $C=C_n$，和构形 $G(C)$ 在 C_{in} 中的节点数 m，如果

$$\phi<3-n/2, \tag{25.6}$$

则存在也满足（25.6）的构形$G^*(C)\subseteq G(C)$使得$G^*(C)$为地理上好的且不含由二个5—节点，一个r—节点，$r\geq 6$，构成的三角形。进而，若v为$G_0=G(C)-V(C)$的分离节点，即$G_0-v=G_1+G_2$，则

$$m(G_i)\geq\frac{3\,n(G_i)}{2}-6\text{ 。}\tag{25.7}$$

其中$n(G_i)$为与G_i相邻的节点所成圈的长度。$m(G_i)$为G_i的节点数。

限于篇幅不再证明。可见，凡满足（25.4）的构形皆甚似可约。或者说，对于C的4—着色x的值较大。

最后，估计不可免性。目的在于对于任定的整数$n_0\geq 5$，求二整数θ和ϕ_0使得任何极大平面图至少含一个构形其外圈长$n\leq n_0$，$\phi\leq\phi_0$落在某节点的θ—邻域中。为此，先对O—邻域分类：N_1，$N_2,\cdots,N_s$，$\cdots$。其中，N_1为一个节点；N_2为二个节点连一边；N_3为一三角形；N_4为二三角形相邻；N_5为一个节点与其四个相继的相邻节点所生成；N_6由一个节点和它的所有相邻节点生成；N_7为N_6加一个与之有一条公共边的三角形；N_s，$s\geq 8$，为N_{s-6}的1—邻域。

从平均的观点，由（22.1）可知极大平面图节点的平均次为$6-\frac{12}{\nu}$，ν为节点数，故可视为6。这样，N_1即一个次为6的节点。对任N_s，其节点数定为m，由节点次皆6，可确定构形的外圈长n。由此，又可得ϕ的平均值。如图25.2中“×”所示。其旁的数字为s。由（25.6）的边界所确定的临界线下，引理25.3表明为几乎可约区域。从N_{15}之后全落入此区域中。

然，实际上，任何极大平面都有次不超过5的节点。从而，总有ϕ小于平均值的构形。如，可设N_s中接近中心的节点次为5，其他次皆6。这时，亦可确定m，n。进而，得ϕ。图25.5中“•”所示。同样，旁边的数字为s。可见，从N_{14}，即$n\geq 17$，开始落入几乎可约区域。

另一方面，$n\leq 12$时，$\phi\geq 0$。因此，可能存在极大平面图无外圈长不超过12的可约构形。对$n\leq 13$，$\phi\geq -1$，不好想像也有这种极大平面图。从而，有理由推断在$n\leq 14$，15，乃至16的可约构形中存在不可免的完备集。

参 考 文 献

[1] Birkhoff, G. D., The reducibility of maps, *Amer J. Math.* 35（1913），pp.115—128。

[2] Errera, P. Une contribution au probleme des quatre couleurs, Bull.*Soc.Math.France*, Vd. 53（1925），pp. 42—55.

[3] Franklin, P., The four color problem, *Amer.J.Math.*44（1922），pp. 225—236.

[4] ——, Note on the four color problem, *J. Math. Phys.* Vol. 16（1938），pp. 172—184.

[5] Winn, C. E., On certain reductions in the four color problem, *J. Math. Phys.* Vol. 16（1938），pp. 159—171.

[6] Choinacki, C. A., A contribution to the four color problem, *Amer. J. Math.* Vol. 64（1942），pp. 36—54

[7] Bernhart, A., Six—rings in minimal five color maps, *Amer. J. Math.* 69（1947），pp. 391—412.

[8] Bernhart, F., Topics in graph theory related to the four color conjecture, Doctoral

Dissertation, Kansas State Univ 1974.
[9] Whitney, H. and Tutte, W. T., Kempe chain and the four color problem, *Utilitas Math.* Vol. 2 (1972), pp. 241—281.
[10] Heesch, H., Undersuchungen zum Vierfarbenproblem, Mannheim, 1969.
[11] ——, Chromatic reduction of the trianggulations Te, $e=e_5+e_7$, *J. Comb Theory* (B) 13 (1972), pp. 46—55.
[12] Mayer, J., Inégalités nouvelles dans le probléme des quatre couleurs, *J. Comb Theory* (B) 19 (1975), pp. 119—149.
[13] Allaire, F. and Swart, E. R., A systematic approach to the detemination of reducible configurations in the four—color conjecture, *J. Comb. Theory* (B) 25 (1978), pp. 339—362.
[14] Stromquist, W., The four color theorem for small graphs, *J. Comb. Theory* (B) 19 (1975), pp. 256—268.
[15] Winn, C. E., A case of coloration in the four color problem, *Amer. J. Math.* 59 (1937), pp. 515—529.
[16] Haken, W., On geographically good configurations, *Notices Amer. Math. Soc.* 20 (1973), 704—A17.
[17] ——, An existence theorem for planar maps, *J. Comb. Theory* (B) 14 (1973), pp. 180—184.
[18] Wernicke, P., Über den kartographischen Viefarbensats, *Math. Ann.* Vol. 58 (1904), pp. 413—426.
[19] Lebesgue, H., Quelques consequences simples de la for—mule d'Euler, *J. de Math.* Vol. 9 (1940), pp. 27—43.
[20] Bernhart, A., Another reducible edge configuration, *Amer. J. Math.* Vol. 70 (1948), pp. 144—146.
[21] Ore, O. and Stemple, J., Numerical calculations on the four color problem, *J. Comb. Theory* (B) 8 (1970), pp. 65—78.
[22] Appel, K. and Haken, W., The existence of un—avoidable sets of geographically good configurations, *Illinois J. Math.* 20 (1976), pp. 218—297.
[23] ——, ——, An unavoidable set of configurations, *J. Comb. Theory* (B) 26 (1979), pp. 1—21.
[24] ——, ——, Every planar map is four colorable Ⅰ: Discharging, *Illinois J. Math.* 21 (1977), pp. 429—490.
[25] ——, —— and Koch, J., Every planar map is four colorable Ⅱ: Reducibility, *Ill—inois J. Math.* 21 (1977), pp. 491—567.
[26] ——, —— and Mayer, J., Triangulation à v_5 séparés le probléme des quatre couleurs, *J. Comb. Theory* (B) 27 (1979), pp. 135—150.
[27] 刘彦佩，平面图的理论与四色问题（Ⅰ）——平面性与对偶性，数学研究与评论，第

三卷（1983），第三期，pp. 123 —136 .

Planar Graph Theory and the Four Color Problem (V)
——The Channel of Proof of the Four Color Theorem Assisted by Computer

Liu Yan Pei

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinice)

Abstract

This is the fifth part of the series of five papers about planar graph theory and the four color problem.

It contains the following five sections : § 21 Reducibility; § 22 Unavoidable sets of configurations; § 23 Discharging; § 24 Testing reducibility by computer; § 25 The probability analysis.