1986年 7 月

数学研究与评论
第六卷 第三期

格上点式拓扑的基数函数

刘 晓 石

（成都科技大学应用数学系）

目前，不分明拓扑学的研究正迅速地向拓扑格的理论迈进。文〔1〕总结了过去的工作，较为全面地在一种合理而广泛的框架下建立了格上点式拓扑的远域系结构，以及Moore-Smith收敛的理论，为格上拓扑学的进一步研究奠定了基础．本文就是在这种较为广泛而又合理的拓扑格的背景下，以“远域”为工具，建立了格上拓扑学的各种基数函数的概念，讨论它们之间的关系，并推广了若干在一般拓扑学中较为著名的基数不等式。

在本文的讨论中，我们不涉及任何“开”的概念，仅以“闭”的概念作为基本的出发点，而获得了格上基数函数的许多性质．这又一次证明，在格上拓扑理论的研究中，“闭”的概念更为基本，更反映拓扑学的本质。有了这些讨论，人们对格上代数理论的认识，将会有深一层的了解．

§0．预　备

在本文中，$(L\leqslant\wedge\cdot\vee)$ 是一个完全分配格，最小最大元分别为0，1．为读者阅读方便，现将格论及格上拓扑的有关性质及定义介绍如下，均不予证明，详见〔1〕、〔2〕、〔3〕等文．

定义1.1　设 a 是 L的元素，称 a 为既约元，如果 $\forall A, B\in L$，$a\leqslant A\vee B$，则 $a\leqslant A$ 或者 $a\leqslant B$．令M表L的全体非零即约元之集，则称M为L的分子集．M的成员称为分子或点．有时，亦用L(M）表示分子集为M的完全分配格．简称分子格．

通常，用 a、b、c 等表M的成员，用 A、B、C 等表示 L的一般成员．

定理1.2　若L是完全分配格，则L中存在既约元，且L的每个元可表成若干既约元之并．

定义1.3　$a\in L$，$E\subset L$，称E为 a 的极小族，如果 $E\neq\phi$ 且满足

〈i〉 $\sup E=a$；〈ii〉 $\forall G\subset L$，若 $\sup G\geqslant a$，则 $\forall x\in E$、存在 $y\in G$、使 $x\leqslant y$．

若E是M的子集，且是 a 的极小族，则称E为 a 的标准极小族．

定理1.4　设L是完备格，L是完全分配格当且仅当 $\forall a\in L$，a 有一标准极小族．

分子格包含了相当广泛的一类数学对象．如若X是一集，$(\mathscr{P}(X),\ \subset)$ 就是一例．若L(M)是分子格，则 $L(M)^X$ 也是分子格．可见这种格上拓扑学既是一般拓扑学的推广，也是L-Fuzzy 拓扑学的推广．

定义1.5　设L(M)是分子格，$\eta\subset L$．η 称为L上的余拓扑，如果 $0,1\in\eta$、且 η 对有限并及任意交运算封闭．$(L(M),\eta)$ 称为拓扑分子格，简写为TML．η 的成员称为闭元．

定义1.6　设 $(L(M),\eta)$ 是TML，$a\in M$，$P\in\eta$．若 $a\nleqslant P$，称 P 是 a 的远域．记 $\eta(a)=\{P\in\eta;\ a\nleqslant P\}$，称 a 的远域系．

定义1.7　设 $(L(M),\eta)$ 是TML，$A\in L$，$A\neq 0$．若 $b\in M$，$b\leqslant A$ 且 $\forall c\in M$，$b\leqslant c\leqslant A$ 都有 $b=c$，则称 b 是 A 的成份．1的成份称为L的极大点．

定理1.8　设L为分子格，$A\in L$，$A\neq 0$．$a\in M$ 且 $a\leqslant A$．则 A 中有一成份 b 使 $a\leqslant b$．

*1984年12月25日收到。

而且，A中有唯一含a的成份当且仅当A的不同成份不交．

其余，有关TMT的元的闭包、聚点、收敛等概念详见〔1〕，这里不再赘述．

§1．拓扑分子格上的基数函数

首先，我们定义L(M)中元的势．设L(M)是分子格，$\forall A\in L$，定义$|A|=\min\{|\varphi|:\varphi\subset M$且$\vee\varphi=A\}$．这里$|\varphi|$表集合$\varphi$的势．

设$(L(M),\eta)$是TML，ω表第一个无穷序数．

定义2.1 $o(L)=|\eta|$．

定义2.2 $\zeta\subset\eta$称为η的基，如果$\forall P\in\eta$，存在$\zeta\subset\zeta$，使$P=\wedge\zeta$．$W(L,\eta)=\omega\cdot\min\{|\zeta|:\zeta$是$\eta$的基$\}$．

定义2.3 $\forall a\in M$，ζ_a叫作a处的局部基，如果$\zeta_a\subset\eta(a)$且$\forall P\in\eta(a)$，存在$Q\in\zeta_a$使$P\leqslant Q$．

$\chi(a,L)=\omega\cdot\min\{|\zeta_a|:\zeta_a$是$a$处的局部基$\}$，

$\chi(L)=\sup\{\chi(a,L):a\in M\}$．它称为$(L,\eta)$的特征．

定义2.4 $d(L)=\omega\cdot\min\{|A|:A\leqslant L$且$\bar{A}=1\}$．它称为$(L,\eta)$的稠度，当$\bar{A}=1$时，$A$称为L上的稠元．

定义2.5 $\zeta\subset\eta$称为(L,η)的伪基，或ψ基，如果$\forall a\in M$且$a\nleqslant b$，则存在$P\in\zeta$，$P\ngeqslant a$且$P\geq b$．

$\psi W(L)=\omega\cdot\min\{|\zeta|:\zeta\subset\eta$是$(L,\eta)$的$\psi$基$\}$．

定义2.6 $\forall A\in L$，$\zeta_A\subset\eta$称为A处的局部ψ基，如果$\forall b\in M$，$A\nleqslant b$则存在$P\in\zeta_A$，且$A\nleqslant P$，$b\leqslant P$．

$\psi(A,L)=\omega\cdot\min\{|\zeta_A|:\zeta_A\subset\eta$是$A$处的局部$\psi$基$\}$，

$\psi(L)=\sup\{\psi_{(a,L)}:a\in M\}$称为L的伪特征．

定义2.7 $\mathscr{C}\subset\eta\setminus\{1\}$称为L上的Cellular（胞腔）集族，如果$\forall A,B\in\mathscr{C}$，有$A\vee B=1$．

$c(L)=\omega\cdot\sup\{|\mathscr{C}|:\mathscr{C}$是L上的Cellular集族$\}$．

定义2.8 $\varphi\subset\eta$称为L上的闭余复盖，如果$\wedge\varphi=0$．若$\zeta\subset\varphi$有$\wedge\zeta=0$，则称ζ是ψ的子余复盖．

$l(L)=\omega\cdot\min\{\kappa:$L的每个闭余复盖有势为$\kappa$的子余复盖$\}$．它称为L上的Lindelöf数．

定义2.9 $\mathscr{B}\subset\eta\setminus\{1\}$称为L上的$\pi$基，如果$\forall P\in\eta\setminus\{1\}$，存在$B\in\mathscr{B}$，使$P\leqslant B$．

$\pi(L)=\omega\cdot\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}$是L上的$\pi$基$\}$．

定义2.10 $\mathscr{N}\subset L$称为L上的网络（network），如果$\forall P\in\eta$，存在$\mathscr{M}\subset\mathscr{N}$使$P=\vee\mathscr{M}$．

$nW(L)=\omega\cdot\min\{|\mathscr{N}|:\mathscr{N}$是L上的网络$\}$．

以后，文中还将陆续定义一些基数函数．

§3．一些基本的不等式

设A是一集，κ是一基数，定义$[A]^{\kappa}=\{B:B\subset A$且$|B|=\kappa\}$．相应地定义$[A]^{<\kappa}$．

命题3.1 设$(L(M),\eta)$是TML，则$c(L)\leqslant d(L)\leqslant\pi(L)$．

〈i〉令$d(L)=\kappa$，则存在$\varphi\in[M]^{\kappa}$使$\overline{\vee\varphi}=1$．设$\mathscr{C}$是L上的Cellular集族．

$\forall A\in\mathscr{C}$，当然$A\neq 1$．则存在$a_A\in\varphi$，使$a_A\not\leqslant A$.（否则有$\vee\varphi\leqslant A\Rightarrow 1=\overline{\vee\varphi}\leqslant A$，矛盾）于是可定义函数$f:\mathscr{C}\to\varphi$，$A\mapsto a_A$．不难知$f$是单射：$\forall A,B\in\mathscr{C}$，$A\neq B$，由$A\vee B=1$及$a_A\not\leqslant A$，$a_B\not\leqslant B$知$a_A\leqslant B$，$a_A\neq a_B$．故$|\mathscr{C}|\leqslant\kappa$，得$c(\mathrm{L})\leqslant d(\mathrm{L})$．

〈ii〉设$\mathscr{B}\subset\eta\setminus\{1\}$是L上的$\pi$基，$|\mathscr{B}|=\pi(\mathrm{X})$．$\forall B\in\mathscr{B}$则存在$a_B\in\mathrm{M}$，$a_B\not\leqslant B$ 令$\varphi=\{a_B\in\mathrm{M}: B\in\mathscr{B}\}$，则可证$\vee\varphi$是L上的稠元．事实上，若$\overline{\vee\varphi}\neq 1$，则存在$B\in\mathscr{B}$使$\overline{\vee\varphi}\leqslant B$．故$a_B\not\leqslant\overline{\vee\varphi}$矛盾于$a_B\in\varphi$． ▌

命题3.2 〈i〉$\pi(\mathrm{L})\leqslant w(\mathrm{L})\leqslant o(\mathrm{L})\leqslant\max\{2^{|\mathrm{M}|},2^{nw(\mathrm{L})}\}$；

〈ii〉$nw(\mathrm{L})\leqslant w(\mathrm{L})$；〈iii〉$\chi(\mathrm{L})\leqslant w(\mathrm{L})$． ▌

命题3.3 $\max\{d(\mathrm{L}),l(\mathrm{L})\}\leqslant nw(\mathrm{L})\leqslant w(\mathrm{L})$．

证 〈i〉对$d(\mathrm{L})$：设$\mathscr{N}$是L上网络，$|\mathscr{N}|=nw(\mathrm{L})$．$\forall A\in\mathscr{N}\setminus\{1\}$，有$a_A\in\mathrm{M}$且$a_A\not\leqslant A$．令$\varphi=\{a_A\in\mathrm{M}: A\in\mathscr{N}\}$，则有$\overline{\vee\varphi}=1$，否则存在$\mathscr{A}\subset\mathscr{N}$使$\wedge\mathscr{A}=\overline{\vee\varphi}\neq 1$．于是有$A\in\mathscr{A}$使$A\neq 1$．相应地$a_A\not\leqslant\wedge\mathscr{A}=\overline{\vee\varphi}$，矛盾于$a_A\in\varphi$．故$d(\mathrm{L})\leqslant|\varphi|\leqslant nw(\mathrm{L})$．

〈ii〉对$l(\mathrm{L})$：设$\mathscr{N}$同上，设$\varphi\subset\eta$使$\wedge\varphi=0$．$\forall A\in\varphi$，取$\varphi_A\subset\mathscr{N}$使$\wedge\varphi_A=A$．令$\zeta=\bigcup\{\varphi_A: A\in\varphi\}$则由$\zeta\subset\mathscr{N}$知$|\zeta|\leqslant nw(\mathrm{L})$．$\forall B\in\zeta$，存在$A(B)\in\varphi$使$B\in\varphi_{A(B)}$．令$\tilde{\varphi}=\{A(B): B\in\zeta\}\subset\varphi$，由$0=\wedge\varphi=\wedge\{\wedge\varphi_A: A\in\varphi\}=\wedge\zeta$及$B\geqslant\wedge\varphi_{A(B)}=A(B)$知$\wedge\tilde{\varphi}=0$，$|\tilde{\varphi}|\leqslant nw(\mathrm{L})$． ▌

定义3.4 称$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是$T_0$的，如果$\forall a,b\in\mathrm{M}$，$a\neq b$，则存在$P\in\eta(a)$使$b\leqslant P$或者存在$Q\in\eta(b)$使$a\leqslant Q$．简记为$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_0$．

命题3.5 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_0$，则$|\mathrm{M}|\leqslant 2^{w(\mathrm{L})}$

证 设$\xi\subset\eta$是L的远域基，使$|\xi|=w(\mathrm{L})$．对$\forall a\in\mathrm{M}$，令$\varphi_a=\{B\in\xi: a\not\leqslant B\}\subset\xi$，则可证对应$a\mapsto\varphi_a$是单射． ▌

定义3.6 称$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是$\mathrm{T}_1$的，如果$\forall a,b\in\mathrm{M}$，$a\not\leqslant b$，有$P\in\eta(a)$，使$b\leqslant P$．简记为$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1$．显然，$\mathrm{T}_1$性等价于$\forall a\in\mathrm{M}$，$a$的局部伪基存在．

定理3.7 （[1]）$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1\Leftrightarrow\forall x\in\mathrm{M}$，$x$是闭元． ▌

命题3.8 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1$，则$|\mathrm{M}|\leqslant o(\mathrm{X})$． ▌

命题3.9 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1$，则〈i〉$\psi_{\mathrm{W}}(\mathrm{L})\leqslant\min(w(\mathrm{L}),|\mathrm{M}|)$；〈ii〉$\psi(\mathrm{L})\leqslant\chi(\mathrm{L})$；〈iii〉$\psi(\mathrm{L})\leqslant\psi_{\mathrm{W}}(\mathrm{L})$．

以上各条均可从定义直接得到，证明略． ▌

§4．若干重要的基数不等式

定理4.1 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1$，则$|\mathrm{M}|\leqslant nw(\mathrm{L})^{\psi(\mathrm{L})}$．

证 设$\mathscr{N}$是L上的网络，且$|\mathscr{N}|=nw(\mathrm{L})$．对$\forall a\in\mathrm{M}$，由$\mathrm{T}_1$性，可设$\zeta_a\subset\eta(a)$是$a$处的局部伪基，且$|\zeta_a|\leqslant\psi(\mathrm{L})$．定义$f:\mathrm{M}\to[\mathscr{N}]^{\leqslant\psi(\mathrm{L})}$如下：

$\forall a\in\mathrm{M}$，对每个$P\in\zeta_a$，由网络的定义，可取$A_P\in\mathscr{N}$，使$a\not\leqslant A_P$，$P\leqslant A_P$．令$\varphi_a=\{A_P: P\in\zeta_a\}$，则不难知对应$a\mapsto\varphi_a$是单射．有$|\mathrm{M}|\leqslant|[\mathscr{N}]^{\leqslant\psi(\mathrm{L})}|\leqslant nw(\mathrm{L})^{\psi(\mathrm{L})}$． ▌

定义4.2 称$\mathrm{L}(\mathrm{M})$是T_2的，如果$\forall a,b\in\mathrm{M}$，当$a\wedge b=0$时，存在$P\in\eta(a)$，$Q\in\eta(b)$使$P\vee Q=1$．简记为$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_2$．

定义4.3 $\mathrm{E}\subset\mathrm{M}$称为M中一反链，若$\forall a,b\in\mathrm{E}$，$a\neq b$，则$a\wedge b=0$．

定理4.4 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_2$，则M中每条反链的势不超过$\exp(\exp(d(\mathrm{L})))$．

证 设E⊂M是一反链；取φ⊂M使$|\varphi|=d(\mathrm{L})$且$\overline{\vee\varphi}=1$．$\forall a\in\mathrm{E}$，$\forall Q\in\eta(a)$，令$\varphi_{a,Q}=\{b\in\varphi: b\not\leqslant Q\}$．则由$\overline{\vee\varphi}\geqslant a$及闭包的性质知$\varphi_{a,Q}\neq\phi$．令$\mathrm{S}_a=\{\varphi_{a,Q}: Q\in\eta(a)\}\subset\mathscr{D}(\mathscr{D}(\varphi))$，则可以证明，映射$a\mapsto\mathrm{S}_a$是1—1映射：

事实上 $\forall a,b\in\mathrm{E}$，$a\neq b$则$a\wedge b=0$．于是存在$P\in\eta(a)$，$Q\in\eta(b)$使$P\vee Q=1$．我们证明$\varphi_{a,P}\notin\mathrm{S}_b$．若不然，则存在$\varphi_{b,R}\in\mathrm{S}_b$，使$\varphi_{a,P}=\varphi_{b,R}$．令$Q_1=Q\vee R$，则$Q_1\in\eta(b)$，且$P\vee Q_1=1$．由$\varphi_{b,R}\supset\varphi_{b,Q_1}$，得$\varphi_{a,P}\supset\varphi_{b,Q_1}$．取$c\in\varphi_{b,Q_1}$，则有$c\not\leqslant Q_1$，$c\not\leqslant P$．矛盾于$P\vee Q_1=1\geq c$． ▌

例4.5． 令$\beth_0=\omega$，$\beth_{i+1}=2^{\beth_i}(i\in\omega)$ 取$\mathrm{L}=\beth_3\cup\{\beth_3\}$，L上的良序为$\leqslant$；令$\mathrm{X}=\{x\}$，则$\mathrm{L}^{\mathrm{X}}$是分子格，$1=x_{\beth_3}$是既约元，令$\varphi=\{1\}$，有$\overline{\vee\varphi}=1$，故$d(\mathrm{L}^{\mathrm{X}})=\omega\cdot|\varphi|=\omega$，但是$|\mathrm{M}|=|\mathrm{L}|=\beth_3>\beth_2=\exp(\exp\omega)$．

定理4.6 设$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_2$，则M中每条反链的势不超过$d(\mathrm{L})^{\chi(\mathrm{L})}$．

证 取E⊂M是反链；取φ⊂M使$\overline{\vee\varphi}=1$且$|\varphi|=d(\mathrm{L})$．$\forall a\in\mathrm{E}$，设$\xi_a\subset\eta(a)$是a的局部远域基，且$|\xi_a|\leqslant\chi(\mathrm{L})=\kappa$；$\forall P\in\xi_a$，由$\overline{\vee\varphi}\not\leqslant P$知存在$b(P)\in\varphi$使$b(P)\not\leqslant P$．令$f(a)=\{b(P)\in\varphi: P\in\xi_a\}$，则$|f(a)|\leqslant k$．对$\forall Q\in\xi_a$，令$g(a,Q)=\{b\in f(a): b\not\leqslant Q\}$，定义函数$h$: $E\to[[\varphi]^{<\kappa}]^{<\kappa}$，$h(a)=\{g(a,Q): Q\in\xi_a\}$．以下证明$h$是单射：

$\forall a,b\in\mathrm{E}$，$a\neq b$，有$a\wedge b=0$．于是存在$Q\in\xi_a$，$H\in\xi_b$使$Q\vee H=1$，则必有$g(a,Q)\notin h(b)$，证法类似于4.4之证，从略．于是得$|\mathrm{E}|\leqslant|[[\varphi]^{<\kappa}]^{<\kappa}|\leqslant(d(\mathrm{L})^{\kappa})^{\kappa}=d(\mathrm{L})^{\kappa}$．

注 容易找到例子，使$|\mathrm{M}|>d(\mathrm{L})^{\chi(\mathrm{L})}$．

以下我们推广集论拓扑中著名的Sapirovskii定理（[6]4.8）．由于没有“开元”的概念，形式上与原定理有所不同．

定义4.7 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，S⊂M称为L(M)上的离散集，如果$\forall a\in\mathrm{S}$，存在$P\in\eta(a)$使$\vee\{b\in\mathrm{S}: a\not\leqslant b\}\leqslant P$．

显然，S是离散集⇔$\forall a\in\mathrm{S}$，$a\not\leqslant\overline{\vee\{b\in\mathrm{S}: b\not\leqslant a\}}$．

$\mathrm{S}(\mathrm{L})=\omega\cdot\sup\{|\mathrm{S}|$: S⊂M是L(M)上的离散集$\}$．

定理4.8 设$s(\mathrm{L})=\kappa$，$\forall\mathscr{U}$是L(M)的闭余复盖，(即$\mathscr{U}\subset\eta$且$\wedge\mathscr{U}=0$)则存在 $\in[\mathscr{U}]^{<\kappa}$及$\mathrm{S}\in[\mathrm{M}]^{<\kappa}$，使$\wedge\mathscr{V}\leqslant\overline{\vee\mathrm{S}}$．

若不然，$\forall\mathscr{V}\in[\mathscr{U}]^{<\kappa}$，$\forall\mathrm{S}\in[\mathrm{M}]^{<\kappa}$有$\wedge\mathscr{V}\not\leqslant\overline{\vee\mathrm{S}}$．我们归纳定义一集$\{a_\alpha: \alpha\in\kappa^+\}$⊂M如下：对$\alpha\in\kappa$．

设$\forall\beta\in\alpha$，$\{a_\beta: \beta\in\alpha\}$⊂M及$\{H_\beta: \beta\in\alpha\}$已构造，且满足条件：

〈i〉 $\forall\gamma\in\alpha$，$\overline{\vee\{a_\beta: \beta\in\gamma\}}\not\geqslant a_\gamma$

〈ii〉 $\forall\beta\in\alpha$，H_β是a_β的远域，且有$\varphi_\beta\in[\mathscr{U}]^{<\kappa}$使$\wedge\varphi_\beta=H_\beta$

〈iii〉 若$\beta\in\alpha$，$\gamma\in\alpha$且$\beta>\gamma$则$a_\beta\leqslant H_\gamma$，$H_\beta\leqslant H_\gamma$．

现定义a_α、H_α如下：由归纳假设，令$\varphi_\alpha=\bigcup_{\beta\in\alpha}\varphi_\beta$，则$|\varphi_\alpha|\leqslant\kappa\cdot\kappa=\kappa$，且$\wedge\varphi_\alpha=\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta$．故$\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta\not\leqslant\overline{\bigvee_{\beta\in\alpha}a_\beta}$，于是存在$a_\alpha\in$M且$a_\alpha\leqslant\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta$使$a_\alpha\not\leqslant\overline{\bigvee_{\beta\in\alpha}a_\beta}$．由$\wedge\mathscr{U}=0$，记$\mathscr{U}_\alpha=\{P\in\ : P\not\geqslant\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta\}$则$\mathscr{U}_\alpha\neq\phi$．于是存在$P_\alpha\in\mathscr{U}_\alpha$，使$a_\alpha\not\leqslant P_\alpha$．事实上，如果$\forall P\in\mathscr{U}_\alpha$都有$a_\alpha\leqslant P$，则$a_\alpha\leqslant\wedge\mathscr{U}_\alpha$．可得$0\neq a_\alpha\leqslant\wedge\mathscr{U}_\alpha\wedge(\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta)\leqslant\wedge\mathscr{U}=0$，矛盾．令$H_\alpha=P_\alpha\wedge(\bigwedge_{\beta\in\alpha}H_\beta)$，则$H_\alpha\in\eta(a)$．显然$H_\alpha\neq 0$．容易验证，$a_\alpha$、$H_\alpha$满足上述三条件，归纳步骤完成．

以下证明，$\{a_\alpha: \alpha\in\kappa^+\}$是L(M)上的离散集．$\forall\alpha\in\kappa^+$，由归纳构造，知$\overline{\bigvee_{\beta\in\alpha}a_\beta}\not\geqslant a_\alpha$，且$\forall\gamma\in\kappa^+$，$\gamma>\alpha$有$a_\gamma\leqslant H_\alpha$，$a_\alpha\not\leqslant H_\alpha$．于是，由$H_\alpha\geqslant\overline{\bigvee_{\gamma>\alpha}a_\gamma}$ 知$a_\alpha\not\leqslant\overline{\bigvee_{\gamma>\alpha}a_\gamma}$，得

$a_a \not\leqslant \overline{\bigvee\{a_\beta: \beta \neq a, \beta \in \kappa^+\}}$. 于是 (M) 上存在势为$\kappa^+$的离散集，矛盾于$s(\mathrm{L})=\kappa$.

引理4.9 (Erdös, Rado〔4〕) 设κ是无穷基数，A是一集，且 $|\mathrm{A}| \geqslant (2^\kappa)^+$，则若$[\mathrm{A}]^2=\{\{a,b\}: a,b\in \mathrm{A}, a\neq b\}=\bigcup_{a\in\kappa} \mathrm{B}_a$，则存在$a_0\in\kappa$, $\mathrm{C}\in[\mathrm{A}]^{\kappa^+}$，使 $[\mathrm{C}]^2\subset \mathrm{B}_{a_0}$. 这个引理可简记为 $(2^\kappa)^+\to(\kappa^+)^2_\kappa$.

定理4.10 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in \mathrm{T}_2$，则M中每条反链的势不大于 $2^{C(\mathrm{L})\cdot\chi(\mathrm{L})}$.

证 令$\kappa=c(\mathrm{L})\cdot\chi(\mathrm{L})$. 若存在$\mathrm{E}\subset\mathrm{M}$是M中的反链，且 $|\mathrm{E}|>2^\kappa$，对每个$a\in\mathrm{E}$，记$\xi_a=\{H^a_a: a\in\kappa\}\subset\eta(a)$ 是 a的远域基，$\forall\{a,b\}\in[\mathrm{E}]^2$，则$a\wedge b=0$，由$\mathrm{T}_2$性，不难知存在$a,\beta\in\kappa$，使$H^a_a\vee H^b_\beta=1$. 设$\prec$是E上的良序，对$\forall\{a,b\}\in[\mathrm{E}]^2$，不妨设$a\prec b$，定义

$k(a,b)=\min\{a\in\kappa$: 存在$H\in\xi_b$，使$H^a_a\vee H=1\}$

$j(a,b)=\min\{\beta\in\kappa: H^a_{k(a,b)}\vee H^b_\beta=1$.

定义$f: [\mathrm{E}]^2\to\kappa\times\kappa$, $f(\{a,b\})=(k(a,b), j(a,b))$. 则由引理4.9.知，存在$\mathrm{Y}\in[\mathrm{E}]^{\kappa^+}$, a_0, $\beta_0\in\kappa$使 $\forall\{a,b\}\in[\mathrm{Y}]^2$，有$f(\{a,b\})=(a_0,\beta_0)$. 对$\forall a\in\mathrm{Y}$，令$H_a=H^a_{a_0}\vee H^a_{\beta_0}$，显然$H_a\in\eta(a)$. 不难知 $\{H_a: a\in\mathrm{Y}\}$ 构成cellular集族且势为κ^+. 事实上，$\forall\{a,b\}\in[\mathrm{Y}]^2$，不妨设$a\prec b$. 由$H^a_{a_0}\vee H^b_{\beta_0}=1$ 知$H_a\vee H_b=1$. 且由$a\not\leq H_a$得$a\leq H_b$，而$b\not\leq H_b$，故$H_a\neq H_b$. 上述事实矛盾于$c(\mathrm{L})\leq k$. ▌

我们以引理 4.9 ($(2^\kappa)^+\to(\kappa^+)^2_\kappa$) 作工具，用类似于定理4.10之证法，还可以证明:

定理4.11 若$\mathrm{L}(\mathrm{M})\in\mathrm{T}_1$，则 $|\mathrm{M}|\leq 2^{s(\mathrm{L})\cdot\psi(\mathrm{L})}$.

以下转入关于格上的Archangelskiǐ不等式的讨论. 我们将会看到，在TML上，在一定条件下类似的不等式是存在的，一般拓扑学中的Archangelskil不等式是它的特例.这里需要先给出一些定义及引理.

定义4.12 若 $(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$ 是TML，设$\Phi\subset\eta$，$A\in\mathrm{L}$，称Φ是A的点式远域复盖族（简称PRF）如果对A的每个成份a，存在$P\in\Phi$，使$a\not\leq P$.

定义4.13 称分子格 $(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$ 是点式κ-lindelöf的，如果1的每个PRF有势不超过κ的子PRF. 若$\kappa=\omega$，则称为点式Lindelöf.

$pl(\mathrm{L})=\omega\cdot\min\{\kappa$: L(M) 是点式$\kappa$-linolelöf的$\}$.

显然，设X的一拓扑空间，$\mathrm{L}=P(\mathrm{X})$，则$pl(\mathrm{L})$ 与X上的 lindelöf数一致.

引理4.14 若 $(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$ 是TML, $\chi(\mathrm{L})=\mu$，且$\forall B\in\mathrm{L}$，B的不同成份互不相交，则$\forall\varphi\subset\mathrm{M}$且 $|\varphi|\leq 2^\mu$，有 $|\overline{\vee\varphi}|\leq 2^\mu$.

证 令$\mathrm{H}=\overline{\vee\varphi}$. 记$\mathrm{L}_H=\{A\in\mathrm{L}: A\leq H\}$ 则L_H是L的子格,（以原来的半序为半序）也是完全分配格. 若 $(\mathrm{L},\eta)\in\mathrm{T}_2$，令$\eta_H=\{A\wedge H: A\in\eta\}$ 则 $(\mathrm{L}_H,\eta_H)\in\mathrm{T}_2$. 显然，$\mathrm{M}_H=\{b\in\mathrm{M}: b\leq H\}$ 是L_H的分子集，$\forall b\in\mathrm{M}_H$，令 $\{F^b_\beta: \beta\in\mu\}$ 是b在L中的远域基，不难知 $\{F^b_\beta\wedge H: \beta\in\mu\}$ 是L_H中的b的远域基，故$\chi(\mathrm{L}_H)\leq\mu$. 当然$d(\mathrm{L}_H)\leqslant 2^\mu$.设$\mathscr{U}$是$H$的一切成份之集，有$\vee\mathscr{U}=H$且$\mathscr{U}$是L上的反链，亦是$\mathrm{L}_H$上的反链. 由定理 4.7知

$|\mathscr{U}|\leq d(\mathrm{L}_H)^{\chi(\mathrm{L}_H)}\leqslant(2^\mu)^\mu$. 故 $|H|\leqslant|\mathscr{U}|\leqslant 2^\mu$. ▌

引理4.15 若分子格L(M) 的不同的极大点不交，设$\mathscr{U}$是L的极大点之集，$\mathscr{H}\subset\mathscr{U}$，$H=\vee\mathscr{H}$，则对$\forall q$是1的成份（即极大点），若$q\wedge H\neq 0$则$q\in\mathscr{H}$.

证 设$0\neq c\leqslant q\wedge H$，设$\beta^*(c)$ 是c的标准极小族，取$e\in\beta^*(c)$，$e\neq 0$，则由1.3，1.4知存在$p\in\mathscr{H}$，使得$e\leqslant p$. 于是$p\wedge q\geqslant e>0$，但是p与q均是极大点，故必有$p=q$，$q\in\mathscr{H}$.

引理4.16 （[5]，2.24）设$\lambda\leqslant\kappa<\nu$是无穷基数，使得$\kappa^{<\lambda}=\kappa$，并且$G:[\nu]^{<\lambda}\to[\nu]^{<\kappa}$是集合$\nu$上的集值映射，则存在$A\in[\nu]^{\kappa}$，它关于$G$封闭.（指$[A]^{<\lambda}$在$G$下的像含于$A$）.

定理4.17 设$(L(M),\eta)$是T_2的TML，每个元的不同成份彼此不定，1是L的最大元，则$|1|\leqslant 2^{pl(L)\cdot\chi(L)}$.

设 设$pl(L)\cdot\chi(L)=\mu$，记$\mathscr{U}=\{a\in M: a$是1的成份$\}$，当然$\forall a,b\in\mathscr{U}$，$a\neq b$有$a\wedge b=0$．对$\forall a\in\mathscr{U}$，令$\xi_a=\{F^a_\beta:\beta\in\mu\}$是$a$的远域基．令$\lambda=\mu^+$，$\kappa=2^\mu$，则$\kappa^{<\lambda}=\kappa$.

定义函数$G:[\mathscr{U}]^{<\mu}\to[\mathscr{U}]^{<\kappa}$如下：

$\forall\varphi\in[\mathscr{U}]^{<\mu}$，对每个$a\in\varphi$，$\beta\in\mu$，记$\mathscr{W}(a,\beta)=\{W\in L: W\vee F^a_\beta=1$且$a\leqslant W\}$．由$T_2$性，显然$\mathscr{W}(a,\beta)\neq\phi$．令$W^a_\beta=\wedge\mathscr{W}(a,\beta)$，则$F^a_\beta\vee W^a_\beta=F^a_\beta\vee(\vee(a,\beta)=\bigwedge_{W\in\mathscr{W}(a,\beta)}(F^a_\beta\vee W)=\bigwedge_{W\in\mathscr{W}(a,\beta)}1=1$，且有$a\leqslant W^a_\beta$．故$W^a_\beta\in\mathscr{W}(a,\beta)$且是其中最小的一个．令$\widetilde{\mathscr{W}}_\varphi=\{W^a_\beta: a\in\varphi,\beta\in\mu\}$，则$|\widetilde{\mathscr{W}}_\varphi|\leqslant\mu\cdot\mu=\mu$．令$D_\varphi=\{\mathscr{A}\subset\widetilde{\mathscr{W}}_\varphi:\vee\mathscr{A}\neq 1\}$，则$|D_\varphi|\leqslant|P(\widetilde{\mathscr{A}}_\varphi)|\leqslant 2^\mu$.对每个$\mathscr{A}\in D_\varphi$，取$a(\varphi,\mathscr{A})$是1的成份，使$a(\varphi,\mathscr{A})\nleqslant\vee\mathscr{A}$.（这样的$a(\varphi\mathscr{A})$显然存在）令$f(\varphi)=\overline{\vee\{a(\varphi,\mathscr{A}):\mathscr{A}\in D_\varphi\}\vee(\vee\varphi)}$，由引理4.14，$|f(\varphi)|\leqslant 2^\mu=\kappa$，故存在$g(\varphi)\subset M$，$|g(\varphi)|\leqslant\kappa$使$\vee g(\varphi)=f(\varphi)$．对每个$b\in g(\varphi)$，取$a(b)\in$ 使$b\leq a(b)$.（由[1]知这样的$a(b)$唯一存在.）定义$G(\varphi)=\{a(b)\in\mathscr{U}: b\in g(\varphi)\}$，有$|G(\varphi)|\leq\kappa$，定义完成.

由引理4.16，存在$\mathscr{K}\in[\mathscr{U}]^{<\kappa}$，$\mathscr{K}$在$G$下封闭．记$H=\vee\mathscr{K}$，可证$H$是闭元．事实上，$\forall p\leq\bar{H}$，$p\in M$，因$\chi(L)\leq\mu$，不难知$H$中存在分子网$S_p=\{s(\alpha):\alpha\in\mu\}$收敛于$p$.于是$p\leq\overline{\vee S_p}$．$\forall s(\alpha)\leq H=\vee\mathscr{K}$，设$a_\alpha$是1中含$s(\alpha)$的成份，由$a_\alpha\wedge H\geq s(\alpha)\neq 0$知$a_\alpha\in\mathscr{K}$.（引理4.15）令$\varphi_S=\{a_\alpha\in\mathscr{U}: a_\alpha\geq s(\alpha)\}\in[\mathscr{K}]^{\leq\mu}$，则$p\leq\overline{\vee S_p}\leq\overline{\vee_S\varphi_S}\leq f(\varphi_S)\leq\vee G(\varphi_S)\leq H$，故$\bar{H}\leq H$，$H$是闭元.

断言：$H=1$．否则，存在$p\in\mathscr{U}$，$p\nleq H=\vee\mathscr{K}$．$\forall a\in\mathscr{K}$，有$p\nleq a$，故有$p\wedge a=0$．由T_2性，存在$F^a_{\beta(a)}\in\xi_a$，$V_a\in\eta(p)$，使$F^a_{\beta(a)}\vee V_a=1\cdots$（1）由于$a\leq F^a_{\beta(a)}$知$a\leq V_a$，故$V_a\in\mathscr{W}(a,\beta)$，于是$V_a\geq W^a_{\beta(a)}$．当然亦有$F^a_{\beta(a)}\vee W^a_{\beta(a)}=1\cdots$（2）令$\Phi=\{F^a_{\beta(a)}; a\in\mathscr{K}\}\cup\{H\}$，不难知$\Phi$构成1的PRF．事实上，$\forall q\in\mathscr{U}$，若$q\leq H$则由引理4.15，$q\in\mathscr{K}$，于是$q\nleq F^q_{\beta(q)}$；若$q\nleq H$则已证．故由$pl(L)\leq\mu$知存在$\varphi\in[\mathscr{K}]^{\leq\mu}$，使$\Phi'=\{F^a_{\beta(a)}; a\in\varphi\}\cup\{H\}$也是1的PRF．从而$\forall b\in\mathscr{U}$且$b\leq H$均有$b\nleq\bigwedge_{a\in\varphi}F^a_{\beta(a)}$．以下证相应的$\mathscr{A}=\{W^a_{\beta(a)}: a\in\varphi\}$有$\vee\mathscr{A}\neq 1$.

事实上，$\forall a\in\varphi$，令$\mathscr{D}_a=\{q\in\mathscr{U}: q\nleq F^a_{\beta(a)}\}$，$D_a=\vee\mathscr{D}_a$，则由$a\nleq F^a_{\beta(a)}$知$a\nleq D_a$；且易知$D_a\vee F^a_{\beta(a)}=1$及$p\wedge D_a=0$．前一式显然．关于后一式，若存在某个$c\neq 0$，$c\in M$，使$c\leq p\wedge D_a$，取$e\in\beta^*(c)$（$c$的标准极小族）且$e\neq 0$，则存在$q\in\mathscr{D}_a$，使$e\leq p\wedge q$，于是$p\wedge q\neq 0$；而由（1）式及$p\nleq V_a$得$p\leq F^a_{\beta(a)}$，故$p\in\mathscr{D}_a$，知$q\neq p$，矛盾于$p\wedge q=0$．于是，由$D_a\in\mathscr{W}(a,\beta(a))$知$D_a\geq W^a_{\beta(a)}$，故$p\wedge W^a_{\beta(a)}=0$．我们得到，若$\vee\mathscr{A}=1$，则$p=p\wedge(\vee\mathscr{A})=\vee\{p\wedge W^a_{\beta(a)}: a\in\varphi\}=\bigvee_{a\in\varphi}0=0$，矛盾．故$\vee\mathscr{A}\neq 1$.

于是，由前面的定义，得$\mathscr{A}\in D_\varphi$，有$a(\varphi,\mathscr{A})\nleq\vee\mathscr{A}$，且$a(\varphi,\mathscr{A})\leq f(\varphi)\leqslant\vee G(\varphi)\leq\vee\mathscr{K}=H$．而另一方面，由$a(\varphi,\mathscr{A})\nleq W^a_{\beta(a)}$及（2）式知$a(\varphi,\mathscr{A})\leq F^a_{\beta(a)}$对一切$a\in\varphi$成立，故$a(\varphi,\mathscr{A})\leq\bigwedge_{a\in\varphi}F^a_{\beta(a)}$．由$a(\varphi,\mathscr{A})$是1的成份以及$\Phi'$是1的PRF，知必有$a(\varphi,\mathscr{A})\nleq H$，矛盾．于是$H=1$，我们得到$|1|\leq|\mathscr{K}|\leq\kappa=2^\kappa$． ▌

参 考 文 献

〔1〕王国俊，完全分配格上的点式拓扑，84年全国拓扑学年会交流论文.

〔2〕Liu Ying-ming（刘应明），Intersection and Inverse Operation on Union-Preserving mappings and its Applications.Proc.12th.Symp.On Multiple-valued logic, IEEE, Computer Society, 1982, 280-288.

〔3〕B.Hutton, Uniformities on fuzzy top spaces, JMAA, 58(1977) 559—571.

〔4〕P.Erdős and R.Rado, A partition calculus in set theory, Bull, Amer. Math.Soc.62(1956) 427—489.

〔5〕I.Juhaz, Cardinal functions in topology-ten years later, Math. Centrum, Amsterdam, 1980.

〔6〕R.E.Hodel, Cardinal Functions I, "The Handbook of set-The-oretic Topology" ed.K. Kunen, Academic Press, 1984.