数学研究与评论
第六卷　第三期

半径Banach代数Socle的存在性*

杨　庆　德

（云南工学院）

1975年N.J.Kalton、G.V.Wood[1]引进径Banach代数的概念，此类代数包含全体B*-代数和A.Pietsch[2]的算子理想．在［1］中，作者们得到的主要结果之一是：每个弱紧的径Banach代数的Socle存在．1978年M.M.Talabani[3]引进半径Banach代数的概念，并且证明了这类代数严格包含径Banach代数类．

在本文中，我们证明了每个弱紧半径Banach代数的Socle仍然存在，此外，本文还给出了把一个不带单位元的半径Banach代数同胚地嵌入到一个带单位元的半径Banach代数中去的条件，以及一个紧半径Banach代数是有限维的条件．

在下面的讨论中，凡是没有给出定义的概念，总可从［4］中得知．本文讨论的代数都是定义在复数域上，全体复数的集合记为C．

设（A，$\|\cdot\|$）是一个Banach代数，任给A中元素a，定义 $|a|=\sup\limits_{\substack{b\in A\\ b\neq 0}}\frac{\|ab\|}{\|b\|}$．显然$|\cdot|$是一个半范，并且对任意$a\in A$，总有$|a|\leqslant\|a\|$。

称（A，$\|\cdot\|$）中元素a为径元素是指$\|a\|=\rho(a)$，这里$\rho(a)$是a关于范数$\|\cdot\|$的谱半径．如果（A，$\|\cdot\|$）中任一非零闭右理想包含一个非零径元素，则称（A，$\|\cdot\|$）为径Banach代数．

定义1　称（A，$\|\cdot\|$）中元素是指$|a|=\rho(a)$．称（A，$\|\cdot\|$）为半径Banach代数是指（A，$\|\cdot\|$）中每个非零右理想包含一个非零半径元素a．

由$|\cdot|$的定义知，若（A，$\|\cdot\|$）含有单位元素，则$|\cdot|$与$\|\cdot\|$等价．反之，我们有

定理1　设（A，$\|\cdot\|$）为一个不带单位元素的半径Banach代数，且$|\cdot|$与$\|\cdot\|$等价，那么（A，$\|\cdot\|$）能被同胚地嵌入到一个带单位元素的半径Banach代数A_1中．

证　设$A_1=\{x+\lambda e\,|\,x\in A,\lambda\in C\}$．任给$x_i+\lambda_ie\in A_1$（$i=1,2$），定义乘法为

$$(x_1+\lambda_1e)(x_2+\lambda_2e)=x_1x_2+\lambda_1x_2+\lambda_2x_1+\lambda_1\lambda_2e,$$

加法及数乘为$(x_1+\lambda_1e)+(x_2+\lambda_2e)=(x_1+x_2)+(\lambda_1+\lambda_2)e$，$a(x_1+\lambda_1e)=ax_1+a\lambda_1e$　$(a\in C)$．则e就是代数A_1中的单位元素．

在A_1中引进$\|x+\lambda e\|=\sup\limits_{\substack{\|y\|\leqslant 1\\ y\in A}}\|xy+\lambda y\|$．

容易证明$\|\cdot\|$是A_1上的一个半范．它还是一个范数．事实上，如果$\|x+\lambda e\|=0$，那么$xy=-\lambda y$（$\forall y\in A$）．因此$\lambda=0$．若不然$-\frac{x}{\lambda}$将是A的单位元，与假设相抵触．因此$\forall y\in A$有$xy=0$．记$R=\{a\in A\,|\,aA=(0)\}$，则R为（A，$\|\cdot\|$）中闭右理想，若$R\neq(0)$，则存

* 1984年12月24日收到．

在非零元$b\in R$，使得$0\neq|b|=\rho_A(b)$．但是$b^2=0$，可见$\rho_A(b)=0$，发生矛盾．这说明$R=(0)$．由此可见$x=0$．

由假设$\|\cdot\|$在A上的限制即为$|\cdot|$，故$\|\cdot\|$在A上等价于$\|\cdot\|$．由（A，$\|\cdot\|$）的完备性推知（A，$\|\cdot\|$）的完备性．这样（A，$\|\cdot\|$）就被同胚地嵌入到Banach代数（A_1，$\|\cdot\|$）中．

最后证明（A_1，$\|\cdot\|$）的半径性．定义$|a|_{A_1}=\sup\limits_{\substack{b\in A_1\\ b\neq 0}}\frac{\|ab\|}{\|b\|}$，显然$|a|_{A_1}\leqslant\|a\|$．另一方面，$|a|_{A_1}=\sup\limits_{\substack{b\in A_1\\ b\neq 0}}\frac{\|ab\|}{\|b\|}\geqslant\frac{\|ae\|}{\|e\|}=\|a\|$，

从而$|a|_{A_1}=\|a\|$．设J_1为（A_1，$\|\cdot\|$）中平凡闭右理想，从而$J\triangleq J_1\cap A$为（A，$\|\cdot\|$）中闭右理想，并且$J\neq(0)$，若不然，则$e\in J_1$，从而$A_1=J_1$，这与$J=A\cap J_1=(0)$矛盾．所以由（A，$\|\cdot\|$）的半径性，存在非零元$a\in J$，使得$|a|=\rho_A(a)$，即$|a|_{A_1}=\rho_A(a)$．由［1］P_{32}知，$\forall x\in A$，都有$\rho_A(x)=\rho_{A_1}(x)$，因此$|a|_{A_1}=\rho_{A_1}(a)$．证毕．

定义 2　Banach代数（A，$\|\cdot\|$）是弱紧的是指$\forall a\in A$，映射$b\mapsto aba$是弱紧的．

显然，弱紧Banach代数类包含了J.C.Alexader[5]引进的紧Banach代数类。

引理 1　设（A，$\|\cdot\|$）是弱紧半径Banach代数，那么，（A，$\|\cdot\|$）中每个非零闭右理想包含一个非零半径幂等元．

证　设J是（A，$\|\cdot\|$）中非零闭右理想，则有一个半径元素$a\in J$，使得$|a|=\rho(a)=1$．由于$Sp(a^n)=[Sp(a)]^n$（$Sp(a)$表示元素a的谱集），故$1=\rho(a^n)\leqslant|a^n|\leqslant|a|^n=1$，从而对任意正整数$n$，$|a^n|=1$．

由$|\cdot|$的定义，$\{a^n|n\geqslant1\}$在（A，$\|\cdot\|$）中有界．因为映射$b\mapsto aba$在（A，$\|\cdot\|$）中是弱紧的，所以$\{a^n|n\geqslant3\}$是相对弱紧的，从而$\{a^n|n\geqslant3\}$的弱闭包（记为D）关于弱拓扑是紧的.容易证明D还是一个半群，并且对每个$s\in D$，右平移$t\mapsto ts$和左平移$t\mapsto st$在弱拓扑下是连续的．由［6］P_{19}知道，在D中存在一个幂等元e．

设A_0是由a所生成的关于$\|\cdot\|$为闭的交换Banach代数，那么在A_0上存在一个可乘线性泛函Φ，使得$\Phi(a)=1$．由Hahn—Banach定理，将Φ从A_0上保范延拓到A上，不妨仍记延拓后的线性泛函为Φ，则$\Phi\in(A,\|\cdot\|)^*$（$(A,\|\cdot\|)^*$表示（A，$\|\cdot\|$）上全体有界线性泛函），由于$e\in D$，由此在$\{a^n|n\leqslant3\}$中存在一个序列$\{x_n\}$，其弱收敛于e．故此，$\Phi(e)$是$\{\Phi(a^n)\}$的聚点，因此$\Phi(e)=1$．所以$e\neq0$．又$(A,|\cdot|)^*\subseteq(A,\|\cdot\|)^*$，故$\{x_n\}$在（A，$|\cdot|$）的弱拓扑下也收敛于$e$，因而$|e|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}|x^n|=1$（［7］$P_{120}$定理1）．另一方面有$\rho(e)=\lim\limits_{n\to\infty}\|e^n\|^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\|e\|^{1/n}=1$．可见$e$是A中非0半径幂等元．

e属于J是显然的．证毕．

引理 2　设e是半径Banach代数（A，$\|\cdot\|$）中一个非0半径幂等元，则（eAe，$\|\cdot\|$）是一个半径Banach代数，并且在（eAe，$\|\cdot\|$）的任一闭右理想J中，存在一个非0半径元素，它也是（A，$\|\cdot\|$）中的半径元素．

证　eAe是A的闭子代数是显然的．

记$B=eAe$，　$a\in B$，定义$|a|_B=\sup\limits_{\substack{b\in B\\ b\neq 0}}\frac{\|ab\|}{\|b\|}$显然有$|\cdot|_B\leqslant\|\cdot\|$．

设J是（eAe，$\|\cdot\|$）中一个闭右理想，假设$a\in J$，$a\neq0$，则$\overline{aA}$是（A，$\|\cdot\|$）中一个非零闭右理想，故存在一个非零半径元素b，不妨设$|b|=\rho(b)=1$．由$eb=b$知

$$1=|b^n|=|(ebe)^{n-1}b|\leqslant|(ebe)^{n-1}|\cdot|b|\leqslant 1.$$

这就证明了$\rho(ebe)=1=|ebe|$. 由［4］P_{35}定理1-6-15知，$\forall a\in B$，有$S_P(a)=S_{P_B}(a)\cup(o)$，故$\rho_B(ebe)=1$.

另一方面，$|ebe|_B\leqslant|ebe|=1$，因此$|ebe|_B=\rho_B(ebe)=1$，即ebe是$(B,\|\cdot\|)$中一个半径．又$ebe\in\overline{aAe}=\overline{aeAe}\subseteq J$．证毕．

设e为代数A中的幂等元，如果eAe是可除代数，则称e为极小幂等元．

定理2 设A是弱紧半径Banach代数，J是$(A,\|\cdot\|)$中一个非零闭右理想，则J包含一个极小半径幂等元．

证 由引理1，J包含一个非零半径幂等元f．设g和h是半径幂等元，如果$gh=hg=h$，我们就记为$g\geqslant h$．下面用Zorn引理来证明：

$$M=\{g\in J\mid g\text{非零半径幂等元，且}g\leqslant f\}$$

关于序"$\leqslant$"有极小的下界存在．设$F=\{g_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{A}\}$是M中任一全序子集，此处$\mathscr{A}$是一有向集．利用映射$a\mapsto faf$是弱紧的以及Eberlein–Shmulyan定理（［7］P_{120}）可证得$(fAf,\|\cdot\|)$是自反空间．又$\forall\alpha\in\mathscr{A}$，$1=|g_\alpha|=\sup\limits_{\substack{b\neq 0\\ b\in A}}\dfrac{\|g_\alpha b\|}{\|b\|}\geqslant\dfrac{\|g_\alpha f\|}{\|f\|}=\dfrac{\|g_\alpha\|}{\|f\|}$，

即$\|g_\alpha\|\leqslant\|f\|$．因此在F中有子序列$\{g_{\alpha(\beta)}\mid\beta\in\mathscr{B}\}$弱收敛到$fAf$中某元素$g$，显然$|g|\leqslant 1$．因为由$g_{\alpha(\beta)}\xrightarrow{W_{\|\cdot\|}}g$（$W_{\|\cdot\|}$意为$(A,\|\cdot\|)$的弱拓扑）推知$g_{\alpha(\beta)}\xrightarrow{W_{\|\cdot\|}}g$，从而$|g|\leqslant\lim\limits_{\beta}|g_{\alpha(\beta)}|=1$．

$\forall\alpha_0\in\mathscr{A}$，最终总有$g_{\alpha(\beta)}\leqslant g_{\alpha_0}$成立，故$gg_{\alpha_0}\xlongequal{W_{\|\cdot\|}}\lim\limits_{\beta}g_{\alpha(\beta)}g_{\alpha_0}=g$，类似地有$g_{\alpha_0}g=g$，$g^2\xlongequal{W_{\|\cdot\|}}\lim gg_{\alpha(\beta)}=g$．所以$g$是一个幂等元，并且对$\forall\alpha_0\in\mathscr{A}$，总有$g\leqslant g_{\alpha_0}$．

由于$g_{\alpha(\beta)}\xrightarrow{W_{\|\cdot\|}}g$，由Mazur定理（［7］$P_{120}$）可知，存在$\{g_{\alpha(\beta)}\}$的凸线性组合$\sum\limits_{n=1}^{k}c_n\cdot g_{\alpha(\beta_n)}$，此处$\sum\limits_{n=1}^{k}c_n=1$，$c_n\geqslant 0$，使得$\|\sum\limits_{n=1}^{k}c_ng_{\alpha(\beta_n)}-g\|<\dfrac{1}{2\|f\|}$成立．不失一般性，假设$g_{\alpha(\beta_k)}\leqslant g_{\alpha(\beta_n)}(n\leqslant k)$．于是

$$\|g_{\alpha(\beta_k)}-g\|=\|(\sum_{n=1}^{k}c_ng_{\alpha(\beta_n)}-g)\,g_{\alpha(\beta_k)}\|\leqslant\|\sum_{n=1}^{k}c_ng_{\alpha(\beta_n)}-g\|\cdot\|g_{\alpha(\beta_n)}\|\leqslant\frac{\|f\|}{2\|f\|}=\frac{1}{2}.$$

所以$g\neq 0$．易见$g\in M$．由Zorn引理，M包含一个非0半径幂等元e，如果$g\in M$，并且$eg==ge=g$，则$g=e$．

由引理2，$eAe=B$是一个半径Banach代数．假设$b\in B$，$b\neq 0$，则$\overline{bB}$是$(B,\|\cdot\|)$中一个非零闭右理想，再由引理5 $\overline{bB}$包含A中的一个非零半径幂等元c，显然$ce=ec=c$，即$c\leqslant e$，由此$c=e$，可见$e\in\overline{bB}$．因此存在$x\in bB$，使得$\|e-x\|<1$．x有逆x^{-1}存在，此逆由Neumann级数$e+(e-x)+(e-x)^2+\cdots$给出．再由$\|(e-x)^n\|\leqslant\|e-x\|^n$及B的完备性，$x^{-1}\in B$．从而$e=xx^{-1}\in bB$，于是$bB=B$．这说明B中任意非零元素均有逆，由Mazur–Gelfand定理（［4］P_{38}），$B=Ce$，所以e是极小幂等元．证毕．

从定理2我们知道，在每个弱紧半径Banach代数A中，一定存在有非零极小幂等元e，由［4］P_{46}引理2.1.12，A的Socle存在．

定理3 设$(A,\|\cdot\|)$是一个弱紧半径Banach代数，S为其Socle，如果$a\in A$，并且$aS=(0)$，那么$a=0$．

证 记$J=\{a\in A\mid aS=(0)\}$，则J是$(A,\|\cdot\|)$的闭右理想．因此如果$J\neq(0)$，则由

定理2，J包含一个非零极小半径幂等元e，而且$e \in S$，故$eS \neq (0)$．这矛盾说明$J=(0)$．证毕．

两个幂等元e, f，如果$ef=fe=0$，则称为正交的．

由定理2，每个弱紧半径Banach代数中存在着非零极小幂等元，从而每个紧半径Banach代数中也存在着非零极小幂等元．

定理4 若A为紧半径Banach代数，且A中只包含有限个互相正交的极小幂等元，则存在一族极小幂等元e_1、e_2、…、e_n，使得$e_1+e_2+\cdots+e_n$是A中的单位元．

证 令$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是A中互相正交的极小幂等元的极大族．令$e=e_1+e_2+\cdots+e_n$，如果$(1-e)A \neq (0)$，由于它是$(A, \|\cdot\|)$的闭右理想，故存在一个非0极小幂等元$f \in (1-e)A$，即存在$x \in A$，使得$f=(1-e)x$．令$g=f(1-e)$．则

$g^2=[(1-e)x(1-e)]\cdot[(1-e)x(1-e)]=f(1-e)=g$，因此$g$是幂等元．显然$g$与$e_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$正交．

若$g \neq 0$，则由[5]定理7.5知，$g=e'_1+e'_2+\cdots+e'_m$，其中e'_1，e'_2，…，e'_m为互相正交的极小幂等元．显然有$e'_i e_j=(e'_i g)e_j=e'_i(ge_j)=0$，$e_j e'_i=e_j(ge'_i)=(e_j g)e'_i=0$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$．这与E是A中互相正交的极小幂等元的极大族发生矛盾．所以$g=0$，也就是，$f(1-e)=0$，从而$f=f^2=f(1-e)x=0$．由此可见，必须$(1-e)A=(0)$．

因A是半径Banach代数，从而A是半单的[3]．于是由$[A(1-e)]\cdot[A(1-e)]=(0)$，可知$A(1-e)=(0)$．所以$e$是A的单位元．证毕．

系1 满足定理4中条件的代数A是有限维的．

证 因$a \to eae$是A上紧恒等算子，所以A是有限维的．证毕．

系2 特别的，当紧半径Banach代数A中不存在互相正交的极小幂等元对时，A同构于C．

证 从定理4的证明过程中得知，A中任一极小幂等元均是A的单位元，从而推知A中仅有唯一的一个极小幂等元，不妨记为e，则$A=eAe=Ce$．证毕．

记SocA为代数A的Socle，则

系3 若代数A满足定理4中条件，则$A=\mathrm{soc}A$．

证 因$A=(\sum_{i=1}^{n} e_i)A=\sum_{i=1}^{n} e_i A \subseteq \mathrm{soc}A$．证毕．

参 考 文 献

[1] Kalton, N.J. and Wood, G.V., Radial Banach algebras. Quart. J. Math. Oxford (3), 26(1975), 465—483.

[2] Pietsch, A., Ideale von Sp-operatoren in Banachräumen. Studia Math. 38(1970), 59—69.

[3] Talabani, M.M., Semiradial Banach Algebras, Libyan J. Sci. 8(1978), 71—74.

[4] Rickart, C.E., General Theory of Banach Algebras, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[5] Alexander, J.C., Compact Banach Algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 18(1968), 1—18.

[6] Burckel, R.B., Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups, Gordon and Breach, New York, 1970.

[7] 吉田耕作，泛函分析，中译本，人民教育出版社，1980．