

有限集合上的函数和关系的完全理论中的两个未解决的问题*

杨安洲

(北京工业大学)

令 $X = \{0, 1, \dots, n-1\}$, n 是自然数; 若 S 是集合, 则用 $|S|$ 表示 S 的基数 (S 中元素的个数).

定义 1 令 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 是可数无穷多个独立的变元, 任一独立变元 x_m 的取值范围为 X ; $X^m = X \times X \times \dots \times X$ (即 m 个 X 的笛卡儿乘积); 命 $F(X) = \{f: f \text{ 是函数} \& (\exists m)(f \text{ 的定义域} = X^m) \& f \text{ 的值域} \subseteq X\}$; 若 $S \subseteq F(X)$ 满足 $(\forall f \in F(X))(\exists f_1, \dots, f_k \in S)(f = f_1 f_2 \dots f_k)$, 这里的乘积是指“函数的复合”, 则称 S 是 $F(X)$ 的一个生成子集; 说 S 是独立的, 意指 S 中的任一函数不能由 S 中其余的某有限个函数经“函数复合”(有限次)而得到.

问题 1 令 $k \geq 1$; $C = \{S: S \text{ 是 } F(X) \text{ 的生成子集} \& S \text{ 是独立的}\}$, $C_k = \{S_k: S_k \in C \& |S_k| = k\}$, 问 $|C_k| = ?$

注 1 同样的, 对于“偏函数”类 $F^*(X) = \{f: f \text{ 是函数} \& (\exists m)(f \text{ 的定义域} \subseteq X^m) \& f \text{ 的值域} \subseteq X\}$ 而言, 也可提出类似于问题 1 的问题.

定义 2 令 $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ 是可数无穷多个独立的变元, 独立变元的取值范围是 X , X^m 是 m 个 X 的笛卡儿乘积, 命 $R = \{R: (\exists m)(R \subseteq X^m)\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} R_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{R_m: R_m \subseteq R_m\}$, 对于 $R_m \in R_m$ 可把这样的 $R_m = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m): (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in R_m\} = R_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$ 理解作“多值函数” $x_m = f_{R_m}(x_1, \dots, x_{m-1})$ 即 $(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in R_m \Leftrightarrow x_m = f_{R_m}(x_1, \dots, x_{m-1})$, 看作是由 $x_1, \dots, x_{m-1}$ 的一组“值”对应到 x_m 的“多个值”, x_m 的“值”也在 X 中, 没有值时可令其为 $*$); 当对“多元关系 (例如 R_k)”(或“多值函数”)进行“关系的复合运算”时可把 $R_m(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$ 理解作“多值函数 $x_m = f_{R_m}(x_1, \dots, x_{m-1})$ 的‘值’”, 可把它 (R_m 或 f_{R_m}) 填入关系 $S(\dots \square \dots)$ 中的空位 $\square$ 上, 这样就定义好了“关系的复合运算”, 即中间过程中理解作“多值函数的‘函数值’”, 最后仍理解作“多元关系”; 若略去了变之之后则可简洁地写成“关系的乘积形式”; 若 $S \subseteq R$ 满足 $(\forall R \in R)(\exists R^{(1)}, \dots, R^{(l)} \in S)(R = R^{(1)} \dots R^{(l)})$, 则称 S 是 R 的一个生成子集; 同样的, 对 S 而言也有独立的概念 (参考定义 1).

问题 2 令 $k \geq 1$, $C_k = \{S_k: S_k \text{ 是 } R \text{ 的生成子集} \& S_k \text{ 是独立的} \& |S_k| = k\}$, 问 $|C_k| = ?$

注 2 对于问题 1 与问题 2 中的 C_k 还可提出这样的问题 C_k 中的 S_k 之间有什么关系, 如何相互表出, 如何得到 C_k 中的任一 S_k 等等更为深入一些、更困难一些的问题.

* 1986年6月14日收到.