数学研究与评论
第六卷　第三期

Banach空间中闭算子的多项式的谱分解性*

蹇人宜

（贵阳师院）

本文的目的是讨论闭算子的多项式的谱分解性。

首先，对本文中所涉及的记号及概念加以说明。C表复数域，X为C上的Banach空间。对于$S\subset C$，$\overline{S}$表示S的闭包，S表示S的内部，covS表示S的全体有限开复盖。如果T是X上的闭算子，记作$T\in C(X)$，如T是有界算子，则记作$T\in B(X)$；对于闭算子T，用$D(T)$和$R(T)$分别表示T的定义域和值域。$\sigma(T)$表示T的谱，$\rho(T)=C\setminus\sigma(T)$为$T$的豫解集。如果$T$是具有单值延拓性的算子（简记为$T$有SVEP），则对每个$x\in X$，分别用$\sigma_T(x)$，$\rho_T(x)$和$\widetilde{x}(\cdot)$表示$T$在点$x$的局部谱、局部豫解集和局部豫解式。对于$S\subset C$，谱流形是集合$X_T(S)=\{x\in X: \sigma_T(x)\subset S\}$。记号Inv$T$表示$T$的不变子空间格；如$Y\in \mathrm{Inv}T$，$T|Y$表示$T$在Y上的限制，而$\widetilde{T}=T/Y$表示商算子。$Y\in\mathrm{Inv}T$叫做谱极大子空间是指，对于任何$Z\in\mathrm{Inv}T$，$\sigma(T|Z)\subset\sigma(T|Y)$蕴涵着$Z\subset Y$；$T$的谱极大子空间的全体记作$SM(T)$。

设$T\in C(Z)$，n为给定的自然数，称T具有n-谱分解性质（n-SDP），如果对于任何$\{G_i\}_{i=0}^{n}\in\mathrm{cov}\sigma(T)$，其中$G_o$为$\infty$的邻域，存在着$\{X_i\}_{i=0}^{n}\subset\mathrm{Inv}T$，使得

（Ⅰ）$\sigma(T|X_i)\subset G_i$，$0\leqslant i\leqslant n$；且当$1\leqslant i\leqslant n$时$X_i\subset D(T)$；（Ⅱ）$X=\sum\limits_{i=0}^{n}X_i$.

如果对于任何自然数n，T都有n—SDP，则称T具有谱分解性（SDP）.

如果我们进一步要求上述分解中的$\{X_i\}_{i=0}^{n}\subset SM(T)$，则$T$叫做可分解算子.

如果（Ⅱ）换成（Ⅱ′）$\forall\ Y\in SM(T)$，$Y=\sum\limits_{i=0}^{n}Y\cap X_i$，则称$T$为具有强谱分解性（SSDP）的算子。

如果（Ⅱ）换成（Ⅱ″）存在与T可换的$P_i\in B(X)$，$0\leqslant i\leqslant n$使

$$I=\sum_{i=0}^{n}P_i\ ,\quad R(P_i)\subset X_i\qquad\qquad 0\leqslant i\leqslant n,$$

则称T为具有单位谱分解性（SDI）的算子。

在笔者的未公开发表的工作〔5〕中，获得了如下的几件事实：$T\in C(X)$，$\rho(T)\neq\phi$，则T有SVEP之充要条件是：对于任何$n(>0)$次多项式$p(\lambda)$，$p(T)$有SVEP．并在此基础上得到了关于多项式的谱映射定理的局部化：$\forall\ x\in X$，$p(\sigma_T(x))=\sigma_{p(T)}(x)$，其中$p(\lambda)$是$n(>0)$次多项式。而作为这个结论的直接推论有关于谱流形的如下的等式：$\forall$ 闭集F

$$X_{p(T)}(F)=X_T(p^{-1}(F)\cap\sigma(T))\tag{1}$$

以上所提到的事实也可见〔4〕．下面，我们就利用以上事实来研究闭算子的多项式的谱分

* 1984年4月20日收到．

解性，主要结果是如下的．

定理 算子$T\in C(X)$具有SDP之充要条件是，对于任何$n(>0)$次多项式$p(\lambda)$，$p(T)$具有SDP．

证明 必要性 设$\{G_i\}_{i=0}^{n}\in \operatorname{cov}\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$，其中$G_o$为$\infty$之邻域，其余诸$G_i$相对紧。令$H_i=p^{-1}(G_i)$，$0\leqslant i\leqslant n$，则$\{H_i\}_{i=0}^{n}$ $\operatorname{cov}\sigma(T)$，且$H_o$为$\infty$之邻域，其余$H_i$相对紧。$T$具有SDP，故存在$\{X_i\}_{i=0}^{n}\subset \operatorname{Inv}T$使$X=\sum_{i=0}^{n}X_i$，$\sigma(T\mid X_i)\subset H_i$ $0\leqslant i\leqslant n$．由于对每个i，$X_i\subseteq X_T(\overline{H}_i)$，故$X=\sum_{i=0}^{n}X_T(\overline{H}_i)$．

根据〔2〕推论1.4，$\sigma[T\mid X_T(\overline{H}_i)]\subset \overline{H}_i\cap\sigma(T)\subset p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T)$。$T$有SVEP保证了$X_T(\overline{H}_i)\subset X_T(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))$，故由〔2〕引理1.6及定理1.7有$X=X_T(p^{-1}(\overline{G}_o)\cap\sigma(T))+\sum_{i=1}^{n}X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))$，复由〔2〕之推论1.4，便得到$\sigma[T\mid X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))]\subset p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T)$，因而

$\sigma[p(T)\mid X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))]\subset p[p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T)]\subset\overline{G}_i$．类似可证

$$\sigma[p(T)\mid X_T(p^{-1}(\overline{G}_o)\cap\sigma(T))]\subset\overline{G}_o.$$

最后，由于$X_T(p^{-1}(\overline{G}_o)\cap\sigma(T))$与$X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))$均属于$SM(T)$，故当然属于$\operatorname{Inv} p(T)$。而$T\mid X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))\in B(X)$蕴涵了$p(T)\mid X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))\in B(X)$，因此$X_T^o(p^{-1}(\overline{G}_i)\cap\sigma(T))\subset D(p(T))$。这就证明了$p(T)$具有SDP．

充分性 首先，不难看出，对于紧$F\subset C$

$$X_{p(T)}^o(F)=X_T^o(p^{-1}(F)\cap\sigma(T))\ . \tag{2}$$

〔1〕中证明了为了T具有SDP，必须且只须T具有 ,-SDP。下面我们就来证明：如$p(T)$具有 ,-SDP，则T亦然。为此目的，利用〔1〕中定理6.5所给出的具有,-SDP的算子的特征。假定$p(T)$具有,-SDP，则$p(T)$有SVEP，从而T具有SVEP。又，对于任何紧集F_1，$X_{p(T)}(F_1)$是闭子空间；今设$F\subset\sigma(T)$为任一紧集，则由于$p(\lambda)$是多项式，因此存在闭集F_1满足$F=p^{-1}(F_1)\cap\sigma(T)$，于是利用等式（1）及刚才得知的事实可知$X_T(F)=X_{p(T)}(F_1)$是闭子空间。注意到等式（2），也有$X_{p(T)}^o(F_1)=X_T^o(F)$．$p(T)$具有SDP，蕴涵了$p(\widetilde{T})=p(T)/X_{p(T)}^o(F_1)$闭，但$p(\widetilde{T})=p(T/X_{p(T)}^o(F_1))=p(T/X_T^o(F))=p(\widetilde{T})$，由此可见$\widetilde{T}=T/X_T^o(F)$是闭的．最后，由$\sigma(p(\widetilde{T}))\subset(F_1^o)^C$可知$p(\sigma(\widetilde{T}))\subset(F_1^o)^C$，易知，$[p^{-1}(F_1)]^0=p^{-1}(F_1^0)$，故$\sigma(\widetilde{T})\subset p^{-1}[(F_1^o)^C]=[p^{-1}(F_1^o)]^C\subset(F^o)^C$．这样$T$满足〔1〕定理6.5(iii)，因而$T$具有1-SDP．证完．

作为这个定理的直接后果，我们可以得到以下一些推论。

推论1．$T\in C(X)$具有SSDP之充要条件是，对于任何$n(>0)$次多项式$p(\lambda)$，$p(T)$具有SSDP．

证明．可以证明，为了T具有SSDP，必须且只须对每个$Y\in SM(T)$，$T\mid Y$具有SDP．此外，易知，为了$Y\in SM(T)$，必须且只须$Y\in SM(p(T))$．由于$p(T)\mid Y=p(T\mid Y)$，因此，利用我们的定理即可得到本推论。

推论2．设$T\in C(X)$具有SDI，则对于任意的$n(>0)$次多项式$p(\lambda)$，$p(T)$亦有SDI．

证明 使用〔3〕定理3。设T具有SDI，则T有SDP，因此由上述定理$p(T)$有SDP. 今设F为任一闭集，G为∞的任一包含F的开邻域，则$p^{-1}(F)$和$p^{-1}(G)$亦有相应的性质，由T有SDI可知：存在与T可换的算子$P\in B(X)$，满足：$\forall x\in X_T(p^{-1}(F))$，$Px=x$且$R(P)\subset X_T(\overline{p^{-1}(G)})\subset X_T(p^{-1}(\overline{G}))$. 由前述讨论可见：$P$与$p(T)$可换，且$\forall x\in X_{p(T)}(F)$，$Px=x$且$R(P)\subset X_{p(T)}(\overline{G})$，从而$p(T)$具有SDI.

推论3. 算子$T\in C(X)$是可分解的充要条件是：对任何$n(>0)$次多项式$p(\lambda)$是可分解的.

证明. 根据〔2,〕定理1.8，T是可分解的等价于T有SDP且$X_T(\phi)=\{0\}$，但由本文之定理，T有SDP等价于$p(T)$有SDP；而等式（1）告诉我们$X_{p(T)}(\phi)=\{0\}$与$X_T(\phi)=\{0\}$是等价的，因而推论之结论成立.

参 考 文 献

〔1〕Wang Shen-wang and I. Erdelyi, A Local Spectral Theory for Closed Operators (to appear).

〔2〕I. Erdelyi and Wang Shenwang, Spectral Decomposition for Closed Operators, to appear in The Pacific J. Math.

〔3〕王声望，具有单位谱分解性质的闭算子，摘要发表于Notices Amer. Math. Soc 8(1982).

〔4〕F.H. Vasilescu《Analytic Functional Calculus》, Reidel Pub. Com., 1982, Boston.

〔5〕蹇人宜，无界闭算子的谱映射定理之局部化，贵州省数学会1983年学术讨论会资料。

Spectral Decompositions for Polynomials of a Closed Operator in Banach Space

Jian Rengyi (蹇人宜)

(Guiyang Teacher's College)

Abstract

Suppose X is a Banach space. The main results of this paper is as follows:

Theorem. A closed operator T has the SDP if and only if for any complex polynomial $p(\lambda)$ that is not constant, $p(T)$ has the SDP.