1986年 7 月

数学研究与评论
第六卷 第三期

焦点与中心共存的平面二次系统

李 承 治

(北京大学)

W. A. Coppel 在一篇关于二次系统的综述文章[1]中说过:"我们可以期望利用二次系统的系数组成的代数不等式去描写此系统相图的特性". 一般而言，这是一个困难的问题. 但在某些特殊情形下，这是可以做到的. 文〔2—3〕曾对具有两个中心点或具有两个细焦点的二次系统进行了这种讨论. 本文给出焦点与中心共存时二次系统的系数所应满足的充要条件. 至于此时的相图，只有唯一的一种类型，已在文〔4〕中给出. 但从本文的充要条件出发，将很容易得出这个结果.

文〔2，引理4〕已经证明，对于平面二次系统，中心与细焦点不能共存. 因此，与中心共存的焦点只能是粗焦点. 先证明下面的

引理1. 系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ax^2 + bxy \end{cases} \tag{1}$$

以O(0,0)为中心以M$(0, \frac{1}{n})$为焦点，当且仅当

$$l + n = a = 0, \quad m \neq 0, \quad m^2 + 4n(n+b) < 0. \tag{2}$$

证. 据文〔5,推论2〕，系统(1)以原点为中心，当且仅当下列三组条件至少有一组成立:

(A) $m(l+n) = a(b+2l)$, $a[(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n)] = 0$,

(B) $m = b + 2l = 0$,

(C) $m = 5a$, $b = 3l + 5n$, $2a^2 + n(l+2n) = 0$.

将坐标原点移至M$(0, \frac{1}{n})$，容易得出: 系统(1)以M点为粗焦点的充要条件为

(D) $m \neq 0$, $m^2 + 4n(n+b) < 0$.

显然条件(D)与(B)矛盾. 设(C)成立，则

$$m^2 + 4n(n+b) = 25a^2 + 12n(l+2n) = a^2 \geq 0,$$

这与条件(D)矛盾. 现在设(A)成立且$a \neq 0$，即

$$(l+n)^2(n+b) = a^2(b+2l+n), \quad m(l+n) = a(b+2l).$$

若$l+n=0$，则$b+2l=0$，这导致$na^2=0$，故$n=0$. 这与条件(D)矛盾. 若$l+n \neq 0$,

* 1983年7月1日收到.

则 $m=\dfrac{b+2l}{l+n}a$， $n+b=\dfrac{b+2l+n}{(l+n)^2}a^2$，因此 $m^2+4n(n+b)=\left[\dfrac{(b+2l+2n)a}{l+n}\right]^2\geq 0$，也与（D）矛盾．综上所述，系统（1）以O为中心以M为焦点（粗焦点）的充要条件是（D）及（A）$_{a=0}$成立，即条件（2）成立．引理1证完．

考虑更一般的系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2. \tag{3}$$

记

$$\begin{cases} J(u,v)=b_{02}u^3-(b_{11}+a_{02})u^2v+(a_{11}+b_{20})uv^2-a_{20}v^3, \\ P(u,v)=(a_{11}+2b_{02})u-(b_{11}+2a_{20})v, \\ Q(u,v)=(a_{11}u+b_{11}v)^2+4(a_{20}u-b_{02}v)^2-4(a_{11}b_{02}+b_{11}a_{20}). \end{cases} \tag{4}$$

定理1．系统（3）同时存在中心与焦点，当且仅当 $a_{20}+a_{02}=b_{20}+b_{02}=0$，并且存在 $\theta\in[0,\pi)$，使 $J(\cos\theta,\sin\theta)=0$，$P(\cos\theta,\sin\theta)\neq 0$，$Q(\cos\theta,\sin\theta)<0$．

证．设系统（3）同时具有中心与焦点．显然原点是（3）的中心或细焦点，注意到中心与细焦点不能共存[2]，且二次系统最多只有二个中心或焦点型奇点[1]，因而原点必是中心点．设焦点在异于原点的M(x_0,y_0)，我们引入旋转变换

$$x=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta,\quad y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta\quad (0\leq\theta<\pi). \tag{5}$$

将M点转到 η 轴上的某点$\overline{\mathrm{M}}(0,\bar{y}_0)$，某中$\bar{y}_0^2=x_0^2+y_0^2\neq 0$．在变换（5）下，系统（3）变成

$$\frac{d\xi}{dt}=-\eta+\bar{a}_{20}\xi^2+\bar{a}_{11}\xi\eta+\bar{a}_{02}\eta^2,\quad \frac{d\eta}{dt}=\xi+\bar{b}_{20}\xi^2+\bar{b}_{11}\xi\eta+\bar{b}_{02}\eta^2, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{20}&=a_{20}\cos^3\theta+(b_{20}+a_{11})\cos^2\theta\sin\theta+(a_{02}+b_{11})\cos\theta\sin^2\theta+b_{02}\sin^3\theta,\\
\bar{a}_{11}&=a_{11}\cos^3\theta-[2(a_{20}-a_{02})-b_{11}]\cos^2\theta\sin\theta+[2(b_{02}-b_{20})-a_{11}]\cos\theta\sin^2\theta-b_{11}\sin^3\theta,\\
\bar{a}_{02}&=a_{02}\cos^3\theta+(b_{02}-a_{11})\cos^2\theta\sin\theta+(a_{20}-b_{11})\cos\theta\sin^2\theta+b_{20}\sin^3\theta,\\
\bar{b}_{20}&=b_{20}\cos^3\theta-(a_{20}-b_{11})\cos^2\theta\sin^2\theta+(b_{02}-a_{11})\cos\theta\sin^2\theta-a_{02}\sin^2\theta,\\
\bar{b}_{11}&=b_{11}\cos^3\theta+[2(b_{02}-b_{20})-a_{11}]\cos^2\theta\sin\theta+[2(a_{20}-a_{02})-b_{11}]\cos\theta\sin^2\theta+a_{11}\sin^3\theta,\\
\bar{b}_{02}&=b_{02}\cos^3\theta-(a_{02}+b_{11})\cos^2\theta\sin\theta+(b_{20}+a_{11})\cos\theta\sin^2\theta-a_{20}\sin^3\theta.
\end{aligned} \tag{7}$$

将奇点M$(0,\bar{y}_0)$的坐标（$\bar{y}_0\neq 0$）代入（6）的第二式容易知道$\bar{b}_{02}=J(\cos\theta,\sin\theta)=0$，因此系统（6）已化为（1）的形式．由引理1，系统（6）以$\overline{O}(0,0)$为中心以$\overline{\mathrm{M}}(0,\bar{y}_0)$为焦点的充要条件为

$$\bar{a}_{20}+\bar{a}_{02}=\bar{b}_{20}=0,\quad \bar{a}_{11}\neq 0,\quad \bar{a}_{11}^2+4\bar{a}_{02}(\bar{a}_{02}+\bar{b}_{11})<0. \tag{8}$$

由（7）式并利用 $\bar{b}_{02}=0$ 可以算出

$$\bar{a}_{20}+\bar{a}_{02}=(a_{20}+a_{02})\cos\theta+(b_{20}+b_{02})\sin\theta,$$
$$\bar{b}_{20}=\bar{b}_{20}+\bar{b}_{02}=-(a_{20}+a_{02})\sin\theta+(b_{20}+b_{02})\cos\theta,$$

因此 $\bar{a}_{20}+\bar{a}_{02}=\bar{b}_{20}=0\Leftrightarrow a_{20}+a_{02}=b_{20}+b_{02}=0$．又

$$\bar{a}_{11}=\bar{a}_{11}+2\bar{b}_{02}=(a_{11}+2b_{02})\cos\theta-(b_{11}+2a_{20})\sin\theta=P(\cos\theta,\sin\theta),$$

故$\bar{a}_{11}\neq 0\Leftrightarrow P(\cos\theta,\sin\theta)\neq 0$．由(7)式可知，$\bar{a}_{11}^2+4\bar{a}_{02}(\bar{a}_{02}+\bar{b}_{11})$ 是$\cos\theta,\sin\theta$ 的六次齐次式，

为了化简，我们采用如下的计算方法：

$$\bar{a}_{02}\sin\theta = \bar{a}_{02}\sin\theta + \bar{b}_{02}\cos\theta = b_{02}\cos^4\theta - b_{11}\cos^3\theta\sin\theta + (b_{20}+b_{02})\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$- b_{11}\cos\theta\sin^2\theta + b_{20}\sin^4\theta = b_{02}\cos^2\theta - b_{11}\cos\theta\sin\theta + b_{20}\sin^2\theta \text{ .}$$

同理可得

$$\bar{a}_{02}\cos\theta = \bar{a}_{02}\cos\theta - \bar{b}_{02}\sin\theta = a_{02}\cos^2\theta - a_{11}\cos\theta\sin\theta + a_{20}\sin^2\theta \text{ ,}$$
$$\bar{b}_{11}\sin\theta = \bar{b}_{11}\sin\theta + 2\bar{b}_{02}\cos\theta = 2b_{02}\cos^2\theta - (b_{11}+2a_{02})\cos\theta\sin\theta + a_{11}\sin^2\theta \text{,}$$
$$\bar{b}_{11}\cos\theta = \bar{b}_{11}\cos\theta - 2\bar{b}_{02}\sin\theta = b_{11}\cos^2\theta - (a_{11}+2b_{20})\cos\theta\sin\theta + 2a_{20}\sin^2\theta \text{.}$$

因此

$$\bar{a}_{02}(\bar{a}_{02}+\bar{b}_{11}) = (b_{02}\cos^2\theta - b_{11}\cos\theta\sin\theta + b_{20}\sin^2\theta)[3b_{02}\cos^2\theta - 2(b_{11}+a_{02})\cos\theta\sin\theta +$$
$$(a_{11}+b_{20})\sin^2\theta] + (a_{02}\cos^2\theta - a_{11}\cos\theta\sin\theta + a_{20}\sin^2\theta)[(a_{02}+b_{11})\cos^2\theta$$
$$-2(a_{11}+b_{20})\cos\theta\sin\theta + 3a_{20}\sin^2\theta] \text{.}$$

将上式展开利用 $\bar{b}_{02}=0$， $a_{20}+a_{02}=b_{20}+b_{02}=0$ 可得

$$\bar{a}_{02}(\bar{a}_{02}+\bar{b}_{11}) = [a_{20}(a_{20}-b_{11}) - b_{02}(b_{02}+2a_{11})]\cos^2\theta + (a_{11}b_{11}+a_{20}a_{11}+b_{02}b_{11})\cos\theta\sin\theta +$$
$$[b_{02}(b_{02}-a_{11}) - a_{20}(a_{20}+2b_{11})]\sin^2\theta \text{,}$$

因此

$$a_{11}^2 + 4\bar{a}_{02}(\bar{a}_{02}+\bar{b}_{11}) = [a_{11}(a_{11}-4b_{02}) - 4a_{20}(b_{11}-a_{20})]\cos^2\theta + 2(a_{11}b_{11}-4a_{20}b_{02})\cos\theta\sin\theta +$$
$$[b_{11}(b_{11}-4a_{20}) - 4b_{02}(a_{11}-b_{02})]\sin^2\theta = (a_{11}\cos\theta + b_{11}\sin\theta)^2 + 4(a_{20}\cos\theta - b_{02}\sin\theta)^2 -$$
$$4(a_{11}b_{02}+b_{11}a_{20}) = Q(\cos\theta, \sin\theta) \text{.}$$

由引理 1，$Q(\cos\theta,\sin\theta)<0$．这样定理 1 的必要性得证．现在来证充分性．设系统（3）的系数满足 $a_{20}+a_{02}=b_{20}+b_{02}=0$，且存在$\theta\in[0,\pi)$使$J(\cos\theta,\sin\theta)=0$，$P(\cos\theta,\sin\theta)\neq 0$，$Q(\cos\theta,\sin\theta)<0$，则以此 θ 的值作变换（5），从上面的（7）式可知必有 $\bar{b}_{02}=0$，且（8）式成立，据引理 1 系统（6）(从而系统（3）)中心与焦点并存．定理 1 证完．

定理 2．系统（1）同时存在中心与焦点，当且仅当条件（2）成立．当条件（2）成立时，$O(0,0)$为中心，$M(0,\frac{1}{n})$ 为粗焦点．

证．对系统（1）应用定理 1．条件 $a_{20}+a_{02}=b_{20}+b_{02}=0$ 变为 $l+n=a=0$．条件 $J(\cos\theta, \sin\theta)=0$ 化为

$$\sin\theta[(l-b)\cos^2\theta + m\cos\theta\sin\theta - l\sin^2\theta] = 0, \quad (0\leq\theta<\pi)$$

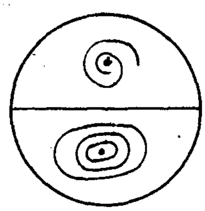
当 $\sin\theta=0$ 即$\theta=0$时 条件$P(1,0)\neq 0$，$Q(1,0)<0$ 化为 $m\neq 0$, $m^2+4n(n+b)<0$，因此得到条件（2）．若 $\sin\theta\neq 0$，则 $m\cos\theta\sin\theta = -(l-b)\cos^2\theta + l\sin^2\theta$，从而

$$Q(\cos\theta,\sin\theta) = (m\cos\theta + b\sin\theta)^2 + 4l^2\cos^2\theta - 4lb = (m\cos\theta - b\sin\theta)^2 + 4l^2\cos^2\theta$$
$$-4lb + 4bm\cos\theta\sin\theta = (m\cos\theta - b\sin\theta)^2 + 4l^2\cos^2\theta - 4lb +$$
$$4b[l\sin^2\theta - (l-b)\cos^2\theta] = (m\cos\theta - b\sin\theta)^2 + 4\cos^2\theta\cdot(l-b)^2 \geq 0.$$

因此系统不可能再有焦点．定理 2 证完．

定理 2 与引理 1 的不同之处在于，它指出对于形如（1）式的二次系统如果中心与焦点共存，则中心必在原点，焦 点必在$M(0,\frac{1}{n})$．

从条件（2）不难推知：系统（1）不再有O，M之外的有限奇点，唯一无穷远奇点是鞍点，且有积分直线$1+by=0$．因此焦点与中心共存的平面二次系统的全局拓扑结构只有一种类型如图 1 所示．



图一

参 考 文 献

〔1〕Coppel, W. A., A survey of quadratic systems, J. Diff. Equs., 2 (1966), No 3, 293—304.

〔2〕李承治，具有两个中心点的平面二次系统，数学学报，28 (1985), 5, 644—648.

〔3〕李承治，具有两个细焦点的平面二次系统，微分方程年刊，1 (1985), 2, 161—169.

〔4〕Лукашевич, Н. А., Дифф. урав., 1 1 (1965), No 1, 82—95.

〔5〕李承治，关于平面二次系统的两个问题，中国科学（A辑），1982, 12: 1087—1096.

The Quadratic System Possessing a Centre and a Focus

Li Chengzhi

(Pekirg University)

Abstract

The main result of this paper is as follows:

Theorem 1. For the system

$$\frac{dx}{dt} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,$$

let

$$P(u,v) = (a_{11} + 2b_{02})u - (b_{11} + 2a_{20})v,$$

$$Q(u,v) = (a_{11}u + b_{11}v)^2 + 4(a_{20}u - b_{02}v)^2 - 4(a_{11}b_{02} + b_{11}a_{20}),$$

$$J(u,v) = b_{02}u^3 - (b_{11} + a_{02})u^2v + (a_{11} + 2b_{20})uv^2 - a_{20}v^3.$$

Then this system possesses a centre and a focus if and only if $a_{20} + a_{02} = b_{20} + b_{02} = 0$, and there exists a $\theta \in [0, \pi)$ satisfying $J(\cos\theta, \sin\theta) = 0$, $P(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$, $Q(\cos\theta, \sin\theta) < 0$.

Thorem 2. The system

$$\frac{dx}{dt} = -y + lx^2 + mxy + ny^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x + ax^2 + bxy.$$

possesses a centre and a focus if and only if $l + n = a = 0$, $m \neq 0$, $m^2 + 4n(n+b) < 0$.