1986年7月

数学研究与评论
第六卷 第三期

各向异性嵌入定理在二阶退缩椭圆方程中的某些应用*

张功安

（吉林大学数学系）

一、引　　言

各向异性嵌入定理是陆文端同志在六十年代初期提出来的，最近几年来，作者对此作了改进和推广．但是它在偏微分方程中的应用至今尚未找到，这引起对这个理论的实用价值表示怀疑．在这篇短文里，我们利用由各向异性嵌入定理所推出的各向带有不同权函数的嵌入定理来说明各向异性嵌入定理在退缩椭园方程中是不可缺少的工具．

文献〔3〕建立了某一类拟线性退缩椭圆方程的广义解的局部有界性、连续性、Harnack不等式、Liouville型定理和可去奇点定理等性质，其中起重要作用的引理1，在附加限制下，它是各向异性嵌入定理的变形，这说明各向异性嵌入定理在证明广义解的上述性质时所起的重要作用．

为了直接看出各向异性嵌入定理在退缩椭园方程中的应用，我们考虑二阶线性退缩椭圆混合边值问题的广义解的极值原理，以及二阶半线性退缩椭圆齐边值问题之非平凡广义解的存在性．

二、各向异性嵌入定理的某些推论

设Ω是n-维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的有界域，$\mathbf{R}^n$中的点$(x_1,\cdots,x_n)$记作x，令$\overline{\lambda}(x)=(\lambda_1(x),\cdots,\lambda_n(x))$，其中$\lambda_i(x)$ $(i=1,\cdots n)$是Ω上非负可测函数．

假定k是非负整数，实数$m>1$，$p_{i_1\cdots i_k}$ $(i_1,\cdots,i_k=1,\cdots,n)$均不小于1．$C^\infty(\Omega)$在模

$$\|u\|_{W^k_{(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)}=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\left\|\frac{\partial k_u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\right\|_{L_{p_{i_1\cdots i_k}}(\Omega)}+\|u\|_{L_1(\Omega)}\quad,\tag{1}$$

$$\|u\|_{W^1_m(\overline{\lambda},\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega\lambda_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m dx\right)^{1/m}+\int_\Omega|u(x)|dx\tag{2}$$

之下完全化后所得到的空间分别记为$W^k_{p_i\cdots i_k}(\Omega)$和$W^1_m(\overline{x},\Omega)$．$C_0^\infty(\Omega)$在模

$$\|u\|_{\mathring{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega\lambda_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m dx\right)^{1/m}\tag{3}$$

之下完全化后所得到的空间记作$\mathring{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$．在$2\Omega$的非空子集$\Gamma$附近为零的无穷次连续可微函数的全体记为$C^\infty(\Omega)$，它在模（3）之下完全化后所得到的空间记作$\dot{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$．显然，$W^k_{p_{i_1\cdots i_k}}(\Omega)$、$\mathring{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$、$W^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$和$\dot{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$都是Banach空间．

我们假定权函数$\lambda_i(x)\geqslant 0$的倒数$\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(\Omega)$，$t_i\geqslant 1$且$t_i(m-1)\geqslant 1$．并且把$u(x)$

* 1982年9月25日收到．

的$L_p(\Omega)$ 模写为 $\|u\|_{p,\Omega}(p\geqslant 1)$.

我们所要引用的各向异性嵌入定理是（见〔1〕引理2.2）：

如果Ω具有一致立方体性质，$u\in W^1_{(p_i)}(\Omega)$ 而且

$$1<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1+\frac{n}{p_j}\quad (j=1,\cdots,n) \tag{4}$$

则对于$q=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1}$ 有$u\in L_q(\Omega)$. 此时

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W^1_{(p_i)}(\Omega)} \tag{5}$$

其中c是与Ω、p_i及n有关而与$u(x)$ 无关的常数. 当$u\in \mathring{W}^1_{(p_i)}(\Omega)$ 时，上述结果对任意有界区域Ω都是对的，且（4）中第二个不等式限制可以去掉.

命题 1 设Ω是有界域，$n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}>m$，$u(x)\in \mathring{W}^1_m(\overline{\lambda},\ \Omega)$，令$p=\dfrac{mn}{n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}-m}>1$，则有

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant c(n,m,t_i,\Omega)\left(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|^{\frac{1}{m}}_{t_i,\Omega}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt[m]{\lambda_i(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m,\Omega}\right). \tag{6}$$

证明 记$\frac{1}{p_i}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{t_i}\right)$，由$t_i(m-1)\geqslant 1$ 知$p_i\geqslant 1$ 且$p=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1}>1$据前引的各向异性嵌入定理有

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant c(n,m,t_i,\Omega)\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p_i,\Omega}. \tag{7}$$

利用Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p_i}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \lambda_i^{-\frac{t_i}{1+t_i}}(x)\left(\lambda_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m\right)^{\frac{t_i}{1+t_i}}dx\right)^{\frac{1+t_i}{mt_i}}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\int_\Omega\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1+t_i}}\int_\Omega\left(\lambda_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial u_i}\right|^m dx\right)^{\frac{1+t_i}{mt_i}}\right]\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|^{1/m}_{t,\Omega}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt[m]{\lambda_i(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m,\Omega}\right).\end{aligned}$$

代入（7）式右端即得不等式（6）.

当区域Ω是凸的情形，我们对空间$\dot{W}^1_m(\overline{\lambda},\ \Omega)$ 建立类似于命题1的结论. 此时p不能如命题1那样取到$\dfrac{mn}{n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}-m}$. 当诸$\lambda_i(x)$ 相同且诸t_i相同时，其结论与命题1一样.

命题 2 设Ω是边界充分正则的有界凸区域，$u(x)\in \dot{W}^1_m(\overline{\lambda},\Omega)$ 且$n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}>m$. 令$t=\min(t_1,\cdots,t_n)$，$p=\dfrac{mn}{n\left(1+\frac{1}{t}\right)-m}>1$，则有

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c(n,m,t,\Omega)\left(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega}^{1/m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt[m]{\lambda_i(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m,\Omega}\right) \tag{8}$$

证明 记$m'=\frac{t}{1+t}m$，于是$p=\frac{m'n}{n-m'}$。据Sobolev 嵌入定理有

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c(n,m,t,\Omega)\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m',\Omega} . \tag{9}$$

应用Hölder不等式即得

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m',\Omega} \leqslant |\Omega|^{\frac{1+t}{mt}-\frac{1+t_i}{mt_i}}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{mt_i}{1+t_i}}dx\right)^{\frac{1+t_i}{mt_i}} \leqslant |\Omega|^{\frac{1+t}{mt}-\frac{1+t_i}{mt_i}}\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega}^{1/m}\left\|\sqrt[m]{\lambda_i(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{m,\Omega}$$

把上面的估计式代入（9）式右端即见（8）式成立.

在文献〔2〕中讨论了$\lambda(x)=\lambda_1(x)=\cdots=\lambda_n(x)$，$t_1=\cdots=t_n=s$且$m=2$情形的嵌入定理，其实可以用命题2的简单讨论来证明. 至于在低维区域上的嵌入定理也可用相同的方法得到. 比如$W_m^1(\overline{\lambda},\ \Omega)$到$\Omega$边界上的嵌入不等式，可取$p(\geqslant 1)$为不超过$\frac{m(n-1)}{n(1+\frac{1}{t})-m}$的实数进行讨论即可。从命题2的证明中可以看出$W_m^1(\overline{\lambda},\ \Omega)$到$\dot{W}^1_{\frac{mt}{1+t}}(\Omega)$的嵌入算子是有界的再据 Конэращев 定理知$\dot{W}_m^1(\overline{\lambda},\ \Omega)$到$L_p(\Omega)$的嵌入是紧的.

记n-维以x_0为中心r为半径的球为$K_r(x_0)$. 在文献〔3〕中证明某一类拟线性退缩椭圆方程的广义解的许多性质时，下列命题起着重要作用.

命题 3 设$K_r(x_0)\subset\Omega$且$\lambda_i(x)\geqslant 0$，$\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_r(x_0))$，$t_i\geqslant 1$，$t_i(m-1)\geqslant 1$并且满足不等式

$$1<m<n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} \tag{10}$$

则对$u(x)\in\mathring{W}_m^1(\overline{\lambda},\ \Omega)$成立不等式

$$\left(r^{-n}\int_{K_r(x_0)}|u|^{km}dx\right)^k \leqslant c(n,m,t_i,\Omega)\Big[\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r(x_0)}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\right)^{1/t_i}\Big(\sum_{i=1}^{n}r^{-n+m}$$

$$\cdot\int_{K_r(x_0)}\lambda_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m dx\Big)+\left(r^{-n}\int_{K_r(x_0)}|u(x)|dx\right)^m\Big] ,$$

其中$k<n\left(n-m+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}$.

证明 先就$r=1$的情形来讨论. 置$\frac{1}{p_i}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{t_i}\right)$，则条件（10）可改写成为

$$1<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1+\frac{n}{p_j} \qquad (j=1,\cdots,n) .$$

今对单位球$K_1(x_0)$应用各向异性嵌入定理，并作命题1的相同讨论即得

$$\left(\int_{K_1(x_0)}|u(y)|^{km}dy\right)^{\frac{1}{km}} \leqslant c(n,m,t_i,\Omega)\Big[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1(x_0)}\lambda_i^{-t}(y)dy\right)^{\frac{1}{mt_i}}\left(\int_{K_1(x_0)}\lambda_i(y)\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^m dy\right)$$

$$+\int_{K_1(x_0)}|u(y)|dy\Big] ,$$

两端取m次幂，再做相似变换$x=ry$，不难推出不等式（11）.

三、退缩椭圆混合边值问题的极值原理

作为各向异性嵌入定理应用的第一个例子，我们考虑二阶线性退缩椭圆方程的混合边值问题广义解的极值原理．文献〔6〕、〔7〕对二阶严格椭圆方程的第一边值问题的广义解建立了极值原理．我们采用文献〔6〕中以截断函数为检验函数来证明混合边值问题的广义解成立极值原理．王俊禹同志讨论了同样的边值问题古典解的极值原理。

在具有适当光滑边界$\partial\Omega$（关于$\partial\Omega$的确切刻画我们不作详细论述）的凸区域Ω中，我们考虑二阶线性椭圆方程

$$\mathrm{L}_u = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a^{i,j}(x)u_{u_j} + b^i(x)u\Big)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} c^i(x)u_{x_i} + d(x)u = f(x). \qquad (1)$$

我们假定对任意$x\in\overline{\Omega}$和实向量$\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$成立

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(x)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad a^{i,j}(x)=a^{j,i}(x)\ , \qquad (2)$$

$\lambda_i(x)\geqslant 0\quad(i=1,\cdots,n)$ 和$\Lambda(x)$ 及$a^{i,j}(x)$ 均是Ω上有界可测函数．

在$\partial\Omega$上满足 $\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)n_i(x)n\qquad)$ 点x的集合记作Γ°，其中$n(x)=(n_1(x),\cdots,n_n(x))$是$\partial\Omega$上在$x$处的单位外法向量函

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{n} b^i(x)n_i(x) \qquad .(3)$$

称为Fichera函数．我们把$\Gamma_3=\partial\Omega\setminus\Gamma^\circ$分为两部分$\Gamma_2=\Gamma_{32}\cup\Gamma_{31}$．并记$\Gamma_0=\{x\in\Gamma^\circ且\beta(x)=0\}$，$\Gamma_1=\{x\in\Gamma^\circ且\beta(x)>0\}$，$\Gamma_2=\{x\in\Gamma^\circ且\beta(x)<0\}$．此外，假定$\Gamma_{31}\cup\Gamma_1$是$\partial\Omega$上具正的$n-1$维测度的边界块．现在考虑边值问题

$$\begin{cases} \mathrm{L}_u = f(x) & 于\Omega中, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)n_i(x)u_{x_j} + \beta(x)u + \gamma(x)u\big|_{\Gamma_{32}} = h(x) & \\ u\big|_{\Gamma_{31}\cup\Gamma_1} = \varphi(x). & \end{cases} \qquad (4)$$

在$\Gamma_{31}\cup\Gamma_1$附近为零的无穷次连续可微的函数类$\mathrm{C}^\infty(\Omega)$中引进内积

$$(u,v) = \int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)u_{x_i}v_{x_j} + uv\Big)dx. \qquad (5)$$

$\dot{\mathrm{C}}^\infty(\Omega)$在由内积（5）所引出的模之下的闭包记作$\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$，它显然是一Hilbert空间．
在下面的讨论中，我们要使用命题2的变形．

命题2′ 在命题2的条件下（其中Γ取为$\Gamma_{31}\cup\Gamma_1$）若$u(x)\in\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$则对于满足$1<p\leqslant\dfrac{2n}{n(1+\frac{1}{t})-2}$的任意$p$，成立不等式

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c(n,t_i,\Omega)\ \Big(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega}^{1/2}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\sqrt{\lambda_i(x)}\frac{\partial u}{\partial u_i}\Big\|_{2,\Omega}\Big) \qquad (6)$$

$$\leqslant \tilde{c}(n,t_i,\Omega)\ \Big(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega}^{1/2}\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a^{i,j}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx\Big)^{1/2}. \qquad (6)$$

实际上当p取为$q=\dfrac{2n}{n\left(1+\frac{1}{t}\right)-2}$的情形，（6）是命题2和条件（2）的直接推论；对$1\leqslant p<q$的情形，由不等式$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_{q,\Omega}$及前述情形推出.

下面记空间$W_2^1(\overline{\lambda},\Omega)$为$H^1(\Omega)$.

定义 函数$u(x)\in H^1(\Omega)$称为边值问题（4）的广义解，如果对于$\dot{H}^1(\Omega)$中的任意非负函数$\eta(x)$，成立积分恒等式

$$\int_\Omega\left\{\left[\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)\eta_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i=1}^n b^i(x)\eta_{x_i}u\right]-\left[\sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}+d(x)u-f(x)\right]\eta\right\}dx$$

$$+\int_{\Gamma_{32}}(\gamma(x)u-h(x))\eta ds=0 \qquad (7)$$

为使（7）中所出现的各个积分存在，我们需要对方程的系数、右端函数及边界上的函数作某些假定.

首先假定

$$\operatorname*{Vrai\ max}_{\Gamma_{31}\cup\Gamma_1}\varphi(x)\geqslant 0,\quad \operatorname*{Vrai\ max}_{\Gamma_{32}}\gamma(x)\geqslant\gamma_0>0,\quad \operatorname*{Vrai\ max}_{\Gamma_{32}}h(x)\ \text{有界.} \qquad (8)$$

其次，取q满足不等式$n\leqslant q<t=\min(t_1,\cdots,t_n)$且令$\chi^*=\dfrac{q}{q\left(1+\frac{1}{t}\right)-2}$，$\chi=\dfrac{n}{n\left(1+\frac{1}{t}\right)-2}$

显然$\chi^*\leqslant\chi$，而且我们假设

$$b^i(x)\in W^1_{\frac{t_iq}{t_i-q}}(\Omega)\quad(i=1,\cdots,n),\ d(x)\in L_{\frac{tq}{2t-q}}(\Omega),\ \gamma(x)\in L_{\frac{t(q-1)}{2t-q}}\Gamma(\Gamma_{32}),$$

$$f(x)\in L_2(\Omega). \qquad (9)$$

最后，假定对于任意非负的$\eta(x)\in H^1(\Omega)$成立不等式

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n b^i(x)\eta_{x_i}-d(x)\eta\right)dx\geqslant 0, \qquad (10)$$

$$\int_\Omega f(x)\eta dx\geqslant 0. \qquad (11)$$

在上述的假设条件下，不难验证（7）式中所出现的各个积分均存在. 例如积分$\int_{\Gamma_{32}}\gamma(x)u\eta ds$可估如下：利用Hölder不等式和嵌入不等式

$$\left|\int_{\Gamma_{32}}\gamma(x)u\eta ds\right|\leqslant\|\gamma(x)\|_{\frac{(q-1)t}{t-q},\Gamma_{32}}\|u\|_{\frac{2(q-1)}{q(1+\frac{1}{t})-2},\Gamma_{32}}\|\eta\|_{\frac{2(q-1)}{q(1+\frac{1}{t})-2},\Gamma_{32}}$$

$$\leqslant const\|\gamma(x)\|_{\frac{(q-)t}{t-q},\Gamma_{32}}\|u\|_{H'(\Omega)}\|\eta\|_{\dot{H}'(\Omega)}.$$

其它积分的存在性可以作类似的讨论或从以后的论证中看出.

今设$u(x)\in H^1(\Omega)$是问题（4）的广义解，记

$$M=\operatorname*{Vrai\ max}_{\Omega}u(x),\quad M_0=\max\left\{\operatorname*{Vrai\ max}_{\Gamma_{31}\cup\Gamma_1}\varphi(x),\operatorname*{Vrai\ max}_{\Gamma_{32}}h(x)/r_0\right\}. \qquad (12)$$

如果$M>M_0$，则存在正数k使得

$$\mathrm{M}_0 < k < \mathrm{M} .$$

取$\eta(x)=\max\{u(x)-k,\ 0\}$ 易知$\eta(x)$ $\dot{\mathrm{H}}'(\Omega)$ 且$\eta(x)\geqslant 0$（关于截断函数$\eta(x)$ 的性质可参看文献〔6〕第二章§3），代入积分恒等式（7）中，并置$\mathrm{A}=\mathrm{A}_k/\mathring{\mathrm{A}}_k=\{x\,|\,u(x)>k,\ x\in\Omega\}/\{x\,|\,u(x)=k,x\in\Omega\}$，我们得到

$$\int_{\mathrm{A}}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b^{i}(x)(\eta+k)\eta_{x_i}-\Big[\sum_{i=1}^{n}b^{i}(x)\eta_{x_i}+d(x)(\eta+k)-f(x)\Big]\eta\Big\}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\Gamma_{32}}(\gamma(x)(\eta+k)-h(x))\eta\mathrm{d}s=0\quad ,$$

或 $$\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x+k\int_{\mathrm{A}}\Big(\sum_{i=1}^{n}b^{i}(x)\eta_{x_i}-d(x)\eta\Big)\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{A}}f(x)\eta\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\Gamma_{32}}\gamma(x)\eta^2\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_{32}}(\gamma(x)k-h(x))\eta\mathrm{d}s=\int_{\mathrm{A}}d(x)\eta^2\mathrm{d}x.$$

根据条件（8）、(10)、(11) 和k的取法知上式左端各积分均为非负，于是有

$$\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathrm{A}}d(x)\eta^2\mathrm{d}x \tag{12$'$}$$

应用Hölder不等式和嵌入不等式（6）可得

$$\Big|\int_{\mathrm{A}}d(x)\eta^2\mathrm{d}x\Big|\leqslant\|d\|_{\frac{tq}{2t-q},\mathrm{A}}\|\eta\|^2_{2\chi^*,\Omega}$$
$$<c(n,t_i,\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega},\Omega)\|d\|_{\frac{tq}{2t-q},\mathrm{A}}\Big(\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x\Big)\ , \tag{13}$$

把它代入（12)$'$ 式的右端后并约去$\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x$ 推出不等式

$$1\leqslant c(n,t_i,\ \|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega},\Omega)\|d\|_{\frac{tq}{2t-q},\mathrm{A}} \tag{14}$$

当$k\to\mathrm{M}$时，mes$A\to 0$ 且由积分绝对连续性得出上式右端可以任意小，此为矛盾，从而证明了$\mathrm{M}\leqslant\mathrm{M}_0$. 注意（14）式是在$\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x>0$ 的条件下推出的，若相反，即$\int_{\mathrm{A}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)\eta_{x_i}\eta_{x_j}\mathrm{d}x=0$，则由嵌入不等式（6）知有$\int_{\Omega}|u(x)|^2\mathrm{d}x=0$，从而亦有$\mathrm{M}\leqslant\mathrm{M}_0$. 总之，我们证明了如下的结论.

定理 设$u(x)\in\mathrm{H}'(\Omega)$ 是边值问题（4）的广义解且条件（2)，(8）—（11）满足，则成立极值原理

$$\max u(x)\leqslant\max\{\mathrm{Vrai}\max_{\Gamma_{31}\cup\Gamma_1}\varphi(x),\ \mathrm{Vrai}\max_{\Gamma_{32}}h(x)/\gamma_0\}\ .$$

当$\Gamma_{31}\cup\Gamma_1$是区域Ω的整个边界$\partial\Omega$时即问题（4）取第一边值的情形，容易由定理的证明中看出，此时可以直接使用各向异性嵌入定理推出的命题1及其如命题2到命题2$'$ 的变形. 这说明各向异性嵌入定理证明极值原理的一个应用.

四、二阶半线性退缩方程的多重解

作为各向异性嵌入定理的应用的第二个例子，我们考虑二阶半线性退缩椭圆方程齐的第

一边值问题的非平凡广义解之存在性．在区域Ω中考虑方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a^{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j}-c(x)u+f(x,u)=0\,,\quad a^{i,j}(x)=a^{i,j}(x)\,,\tag{1}$$

其中$a^{i,j}(x)$和$c(x)\geqslant c_0>0$是Ω上有界可测函数，且$a^{i,j}(x)$满足第三节的条件（2），$\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(\Omega)$．为了能够直接使用各向异性嵌入算子的有界性和列紧性，我们仅限于$\Gamma_{32}\cup\Gamma_1=\partial\Omega$的情形，亦即对方程（1）考虑带有齐的第一边值条件

$$u|_{\Gamma_{32}\cup\Gamma_1}=0$$

的边值问题．关于函数$f(x,u)$假定下列条件满足：

1）$f(x,u)$在$\overline{\Omega}\times\mathrm{R}$上Hölder连续；

2）存在非负常数c_1,c_2使得

$$|f(x,u)|\leqslant c_1+c_2|u|^{a_n},\ 1<a_n<\frac{n+2-n/t^*}{n-2+n/t^*},\frac{1}{t^*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i},\ t^*>\frac{n}{2};$$

3）$f(x,u)=o(|u|)$当$u\to 0$时对$x\in\Omega$一致成立；

4）存在Ω之具有正测度的子集Ω_1，使得对充分大的u（或$-u$）$f(x,u)\geqslant 0$（相应地$f(x,u)<0$）而且$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty$（相应地$\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty$）关于$x\in\Omega_1$一致地成立．

5）对充分大的$|u|$，$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t$满足不等式$F(x,u)\leqslant\theta uf(x,u)$，此处$0<\theta<1/2$．引进内积

$$(u,v)_{\mathrm{H}'(\Omega)}=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)u_{x_i}v_{x_j}+c(x)uv\Big)\mathrm{d}x\,,\tag{3}$$

由此所引出的模记作

$$\|u\|_{\mathrm{H}'(\Omega)}=\Big\{\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)u_{x_i}u_{x_j}+c(x)u^2\Big)\mathrm{d}x\Big\}^{1/2}.\tag{4}$$

$\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$在模（4）之下的闭包记为$\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$．显然，在$\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$中模

$$\|u\|_{\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)}=\Big\{\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)u_{x_i}u_{x_j}\Big)\mathrm{d}x\Big\}^{1/2}\tag{5}$$

与模（4）等价．

命题4 设Ω是有界域，$2\leqslant p\leqslant\dfrac{2n}{n(1+\frac{1}{t^*})-2}$ $\Big(\frac{1}{t^*}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\Big)$ 则空间$\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)$到$\mathrm{L}_p(\Omega)$的嵌入算子是有界的且

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant c(n,m,t_i,\Omega)\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}(x)\|_{t_i,\Omega}^{1/2}\Big)\|u\|_{\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)}\,,\quad u\in\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)\,.\tag{6}$$

如果$2\leqslant q<\dfrac{2n}{n\left(1+\frac{1}{t^*}\right)-2}$，则$\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)$到$\mathrm{L}_p(\Omega)$的嵌入算子还是紧的．

命题4的前一部分的结论由命题1的证明和第三节条件（2）推出；后一部分的结论由命题2的证明及各向异性嵌入算子的列紧性推出．

定义 函数$u(x)\in\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)$称为边值问题（1）—（2）的广义解，如果对任意$v(x)\in\mathring{\mathrm{H}}'(\Omega)$

成立积分恒等式

$$\int_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)u_{x_i}v_{x_j}+c(x)uv-f(x,u)v\Big)\mathrm{d}x=0\,. \qquad (6)$$

根据$a^{i,j}(x)$ 和$c(x)$ 的有界性及关于函数$f(x,u)$ 的条件2)，利用Hölder不等式容易证明上面的各积分存在.

我们定义泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a^{i,j}(x)u_{x_i}u_{x_j}-c(x)u^2\Big)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}dx\int_0^{u(x)}f(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,. \qquad (7)$$

根据条件1）和嵌入定理的命题4 及Nemytski算子的性质（参看文献〔8〕2.2A)，可以验证泛函$J(u)$ 的临界点是边值问题（1）-（2）的广义解. 我们利用翻山定理（The Mountain Pass Theorem)(参看文献〔5〕) 证明泛函（7）至少有一个非平凡的临界点. 就是验证翻山定理的条件满足. 详言之即在条件1），2）和5）之下，泛函$J(u)$ 满足（PS)条件：$\mathring{H}'(\Omega)$ 中满足条件

$$|J(u_k)|\leqslant M_0 \quad 且 J'(u_k)\to 0 \quad (按\mathring{H}'(\Omega)\ 模) \qquad (8)$$

的任意序列$\{u_k\}$ 恒存在于$\mathring{H}'(\Omega)$ 中强收敛子序列；同时，在条件1）- 4）之下，存在正常数δ和η使得$J(u)\geqslant\eta$于任意$\|u\|_{\mathring{H}'(\Omega)}=\delta$成立，而且存在元素$u^*\in\mathring{H}'(\Omega)$ 使得$\|u^*\|_{\mathring{H}'(\Omega)}>\delta$及$J(u^*)=0$. 这些验证与通常所作是类似的，只须用命题4的结论代替通常的Sobolev嵌入定理即可.

参 考 文 献

〔1〕陆文端，Соъолев 空间及其嵌入定理的推广，数学学报，Vol 16 No.1 (1966)，1—24.

〔2〕辜联崑，退缩椭圆型方程的特征值问题，全国微分方程昆明学术会议资料(1980).

〔3〕Колодий, И.М., О Некоморых свойствах обощеннвых решений вырождающихся эллиптических уравнений, ДАН.СССР 197(1971) 268—270.

〔4〕Куржков, С.К., Априорные оценки и некоторные свойства решений эллиптических и ларабол-ических уравнений, Мат. сб., T65 (107) No.4 (1964) 522—570.

〔5〕Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H., Dual Variational Methods in Critical Point Theorey and Applications, J. Functional Anal 14(1973) 349—381.

〔6〕Ладыженская, О.А. и Уральцева, Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 《Наука》, Москва, 1973.

〔7〕Gilbarg D., Trudinger, N. S., 叶其孝等译，二阶椭圆型偏微分方程，上海科技出版社，(1981).

〔8〕Berger, M. S., Nonlinearity and functional analysiy, Academic Pross, New York, 1977.