集合论与代数的新的运算（Ⅱ）*

杨　安　洲

（北京工业大学）

定义1　令$\mathbf{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$＝可数无穷集合，$\mathbf{F}(\mathbf{X})=\{\mathbf{A}: \mathbf{A}\subseteq\mathbf{X}\&\ \mathbf{A}$是有限集$\}$，对于$\mathbf{A}\subseteq\mathbf{X}$，先作一一对应$\mathbf{A}\rightleftarrows(i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots)$，其中$i_1, i_2, \cdots, i_n\cdots\in\{0,1\}$，满足$(\forall k)(x_k\in\mathbf{A}\Leftrightarrow i_k=1)\&(\forall k)(x_k\notin\mathbf{A}\Leftrightarrow i_k=0)$，然后把A与A所对应的$(i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots)$作恒同的理解，$\mathbf{A}\in\mathbf{F}(\mathbf{X})\Leftrightarrow(\mathbf{A}=(i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots)$中最多只有有限个$i_a$等于1，其余的均为0)，对于$\mathbf{A}=(i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots)$，$\mathbf{B}=(j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)\in\mathbf{P}(\mathbf{X})=\{\mathbf{A}: \mathbf{A}\subseteq\mathbf{X}\}$，令$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B})=(k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots)$，其中当$\{l: i_l=j_l=0\}\neq\phi$，$\min\{l: i_l=j_l=0\}=l_0$时取$k_{l_0}=1$，其余所有的$k_a$均与A中的$i_a$相同，然后再令$\mathbf{A}*\mathbf{B}=\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B})\cap\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{A})$，即先用$\varphi$，然后用“交运算”，并把$*$限制在$\mathbf{F}(\mathbf{X})$中进行．

定理1　在$\mathbf{F}(\mathbf{X})$中的运算$*$是可结合的、可交换的，在运算$*$下由ϕ出发可生成$\mathbf{F}(\mathbf{X})$．

定义2与定理2　用对偶原理，对偶地可得对于$\mathbf{F}_c(\mathbf{X})=\{\mathbf{A}: \mathbf{A}\subseteq\mathbf{X}\&(\mathbf{X}-\mathbf{A}=\{x: x\in\mathbf{X}\&x\in\mathbf{A}\}$是有限集$)\}$的运算$*_c=\circledast$，其中X仍为可数无穷集；在$\mathbf{F}_c(\mathbf{X})$中的运算$\circledast$是结合的、交换的，在运算$\circledast$下由X出发可生成$\mathbf{F}_c(\mathbf{X})$．

定义3　令X是可数无穷集，$\mathbf{F}(\mathbf{X})$，$\mathbf{F}_c(\mathbf{X})$仍如前，$*$，$\circledast$仍如前；现在引进一个新的东西（对象）称谓“虚构的集合”并且把它记为$\bigcirc$（注：可理解作全部是空位，$\bigcirc=(\square, \square, \cdots, \square, \cdots)$．命$\mathbf{G}(\mathbf{X})=\mathbf{F}(\mathbf{X})\cup\mathbf{F}_c(\mathbf{X})\cup\{\bigcirc\}$，在$\mathbf{G}(\mathbf{X})$上定义运算$\oplus$：①．$\mathbf{A}\in\mathbf{G}(\mathbf{X})$，令$\mathbf{A}\oplus\bigcirc=\bigcirc\oplus\mathbf{A}=\mathbf{A}$，②．$\mathbf{A}, \mathbf{B}\in\mathbf{F}(\mathbf{X})$，令$\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}=\mathbf{A}*\mathbf{B}$（定义1．），③．$\mathbf{A}, \mathbf{B}\in\mathbf{F}_c(\mathbf{X})$，令$\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}=\mathbf{A}\circledast\mathbf{B}$（定义2．），④．$\mathbf{A}\in\mathbf{F}(\mathbf{X})$，$\mathbf{B}\in\mathbf{F}_c(\mathbf{X})$，$\mathbf{A}=\phi^k=\phi*\phi*\cdots*\phi$（$k$个$\phi$）$\mathbf{B}=\mathbf{X}^l=\mathbf{X}\circledast\mathbf{X}\circledast\cdots\circledast\mathbf{X}$（$l$个X），令$\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}=\mathbf{B}\oplus\mathbf{A}=$

$$=\begin{cases}\bigcirc\text{（虚构的集合），当 } k=l\text{ 时，}\\ \phi^{k-l}=\phi*\phi\cdots*\phi,\ (k-l\text{个}\phi)\text{，当 }k>l\text{时，}\\ \mathbf{X}^{l-k}=\mathbf{X}\circledast\mathbf{X}\circledast\cdots\circledast\mathbf{X},\ (l-k\text{个X})\text{，当 }l>k\text{时．}\end{cases}$$

定理3　按定义3．则$\langle\mathbf{G}(\mathbf{X}), \oplus\rangle$是循环群（无穷的），在运算$\oplus$下由$\{\bigcirc, \phi(\text{空}), \mathbf{X}\}$出发可生成$\mathbf{G}(\mathbf{X})$．

结束语　以上的新运算以及定理（包括（Ⅰ）与这里的（Ⅱ）的内容）回答了“同时具有集合论意义和代数学意义的运算是存在的”。

*1986年6月14日收到．