关于抛物型方程的两个高精度差分格式*

孙传灼　赵　宁　刘心兴
（山东工业大学）

对于热传导问题

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & -\infty<x<\infty,\quad t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

我们取矩形网格，设τ为时间步长，h为空间步长，网比$r=\tau/h^2$. 构造如下形式的三层差分格式：

$$(2)\qquad L_h u_j^k=\frac{1}{\tau\sum\limits_l(a_l+c_l)}\sum_l(a_l u_{j+l}^{k+1}-b_l u_{j+l}^k-c_l u_{j+l}^{k-1})=0$$

其中 $l\in\Omega=\{-N,\cdots,-1,0,\cdots 1,\cdots,N\}$，$a_l$、$b_l$、$c_l$是关于$r$的函数。

我们用$[\ ]_j^k$表示括号内函数在(x_j,t_k)点的值。对于（1）的充分光滑的解$u(x,t)$代入（2），并将$u(x_j+lh,t_{k+1})$，$u(x_j+lh,t_k)$、$u(x_j+lh,t_{k-1})$在(x_j,t_k)点作Taylor级数展开，经整理得

$$(3)\qquad L_h[u]_j^k=u_t'+\frac{h^2\sum\limits_l(a_l-b_l-c_l)l^2}{\partial\tau\sum\limits_l(a_l+c_l)}u_x^{(2)}+\frac{1}{\tau\sum\limits_l(a_l+c_l)}\Big[\sum_l(a_l-b_l-c_l)(u+hu_x')+$$
$$+\sum_l(a_l-b_l-c_l)\sum_{n=3}^{p}\frac{(lh)^n}{n!}u_x^{(n)}+\tau\sum_l(a_l+c_l)\sum_{n=1}^{p-2}\frac{(lh)^n}{n!}u_x^{(n+2)}+$$
$$+\sum_{k'=2}^{[p/2]}\sum_{n=0}^{p-2k'}\sum_l(a_l-(-1)^{k'}c_l)u_x^{(n+2k')}-\frac{\tau^{k'}(lh)^n}{k'!\,n!}+O(h^{p+1})\Big]$$

上式右端的u、u_t'、$u_x^{(n)}$（u关于x的n阶导数）都是在(x_j,t_k)点取值。

在（3）中若使u及u_x'的系数为零，使$u_x^{(2)}$的系数为-1，即令

$$(4)\qquad \begin{aligned} \overline{c_0}&=\sum_l(a_l-b_l-c_l)=0\ , \\ \overline{c_1}&=\sum_l(a_l-b_l-c_l)l=0\ , \\ \overline{c_2}&=\sum_l(a_l-b_l-c_l)l^2+2r\sum_l(a_l+c_l)=0\ , \end{aligned}$$

则有

$$(5)\qquad L_h[u]_j^k-[Lu]_j^k=\sum_{n=3}^{p}\frac{\overline{c_n}h^{n-2}}{r\sum\limits_l(a_l+c_l)}[u_x^{(n)}]_j^k+O(h^{p-1})\ ,$$

其中：

$$(6)\qquad \overline{c_n}=\sum_l(a_l-b_l-c_l)\frac{l^n}{n!}+\sum_{\nu=1}^{[n/2]}\sum[a_l+(-1)^{\nu+1}c_l]\frac{r^\nu l^{n-2\nu}}{\nu!\,(n-2\nu)!},(n=3,4,\cdots).$$

* 1983年3月29日收到.

注 当 $l=0$ 时上式中的 l^0 取为 1.

若使 $\overline{c_0}=\overline{c_1}=\cdots=\overline{c_p}=0$, $\overline{c_{p+1}}\neq 0$, 则有:

(7) $$L_h(u)_j^k-[Lu]_j^k=O(h^{p-1})$$

引理 由(4)与(t)定义的 $\overline{c_n}$, 若取 $a_{-l}=a_l$, $b_{-l}=b_l$, $c_{-l}=c_l$, 则有 $\overline{c_{\partial\mu+1}}=0$. $(\mu=0,1,2,\cdots)$

这个引理的证明很简单, 故从略.

1° 若取 $l\in\Omega=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $a_{-1}=a_1$, $b_{-1}=b_1$, $c_{-1}=c_1$, 令 $\overline{c_i}=0$ $(i=0,1,2,\cdots 6)$, 设 a_1、c_1 为待定参数, 可解得:

(8) $$\begin{cases} b_1=\dfrac{1}{1-60r^2}[(1+30r+120r^2)a_1+(-1+30r-120r^2)c_1] \\ c_0=\dfrac{1}{2r^2}[(\dfrac{1}{6}+r)a_1+(-\dfrac{1}{6}+r)b_1+(-\dfrac{1}{6}+3r-4r^2)c_1] \\ a_0=-\dfrac{1}{r}[rc_0+(1+2r)a_1-b_1+(-1+2r)c_1] \\ b_0=a_0-c_0+2(a_1-b_1-c_1) \end{cases}$$

在(8)中若前一式顺次代入后式, 则 b_1, c_0, a_0, b_0 均可由 a_1, c_1 表示。然后将 a_0,b_0,c_0,a_1 $(=a_{-1})$, $b_1(=b_{-1})$, $c_1(=c_{-1})$ 代入(2), 即得含有两个参数 (a_1, c_1) 的三层九点格式, 且截断误差为 $O(h^6)$ 的方法类.

特别, 当取 $a_1=a_{-1}=\dfrac{1}{360r}-\dfrac{r}{6}$, $c_{-1}=c_1=\dfrac{r}{6}-\dfrac{1}{360r}$ 时, 由(8)得:

(9) $$\begin{cases} b_1=\dfrac{2}{3}r+\dfrac{1}{180r}\ (=b_{-1}) & c_0=\dfrac{1}{2}-\dfrac{r}{3}-\dfrac{7}{90r} \\ a_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{r}{3}+\dfrac{7}{90r} & b_0=-\dfrac{4}{3}r+\dfrac{7}{45r} \end{cases}$$

将上面所得 a_l, b_l, c_l 代入(2)中, 有格式:

(10) $$\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{3}+\frac{7}{90r}\right)u_j^{k+1}-\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{360r}\right)\left(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}\right)=\left(-\frac{4}{3}r+\frac{7}{45r}\right)u_j^k+$$
$$+\left(\frac{2}{3}r+\frac{1}{180r}\right)\left(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}-\frac{7}{90r}\right)u_j^{k-1}+\left(\frac{r}{6}-\frac{1}{360r}\right)\left(u_{j+1}^{k-1}+u_{j-1}^{k-1}\right)$$

显然格式(10)的截断误差为 $O(h^6)$, 因 $\overline{c_i}=0$ $(i=0,1,\cdots,7)$

$$\overline{c_8}=\frac{r}{144}\left(\frac{11}{420}-r^2\right)\neq 0$$

现在我们证明格式(10)的稳定条件。

用 $u_j^k=u_j^k$ 与(10)联立成方程组(显然这个方程组与(10)等价)。记 $w_j^{k+1}=(u_j^{k+1},u_j^k)^T$, 用分离变量法, 令

$$w_j^k=V^k(l')e^{i\sigma x_j}\quad i=\sqrt{-1}\ ,\quad \sigma=2\pi l'\ ,\quad l'=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

代入上述方程组消去 $e^{i\sigma x_j}$ 且整理为: $V^{k+1}(l')=G(\sigma,\tau)V^k(l')$, 其中传播矩阵

$$G(\sigma,\ \tau)=\begin{pmatrix} E & F \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+\frac{r}{3}+\frac{7}{90r}\right)+\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{180r}\right)\cos\sigma h}{\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{3}+\frac{7}{90r}\right)-\left(\frac{r}{3}-\frac{1}{180r}\right)\cos\sigma h},\quad E=\frac{-\left(\frac{4}{3}r-\frac{7}{45r}\right)+\left(\frac{4}{3}r+\frac{1}{90r}\right)\cos\sigma h}{\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{3}+\frac{7}{90r}\right)-\left(\frac{r}{3}-\frac{1}{180r}\right)\cos\sigma h}.$$

$G(\sigma,\tau)$ 的特征方程$\lambda^2-E\lambda-F=0$，其特征根按模小于等于1的充要条件是：$|-F|\leqslant 1$，$|-E|\leqslant 1-F$. 解此不等式组得$r\leqslant(1/2)(13/15)^{\frac{1}{2}}$，此为稳定的必要条件. 又因$|F|<1$成立，故无模为1的重根，由〔2〕中的充分条件四知格式（10）稳定的充要条件为$r\leqslant 1/2($ $r\leqslant(1/2)(13/15)^{\frac{1}{2}}$.

2° 若取$l\in\Omega=\{-1,0,1\}$，$a_{-1}=a_1$，$b_{-1}=b_1$，$c_{-1}=c_1$，令$\overline{c_i}=0$ $(i=0,1,\cdots 8)$，取$c_1=c$为待定参数可解得

$$(11)\quad\begin{cases} a_1=\frac{\triangle_1}{\triangle},\ b_1=\frac{\triangle_2}{\triangle}C, \\ c_0=\frac{1}{2r^2}\left[\left(\frac{1}{6}+r\right)a_1+\left(-\frac{1}{6}+r\right)b_1+\left(-\frac{1}{6}+3r-4r^2\right)c\right], \\ a_0=-\frac{1}{r}\left[rc_0+(1+2r)a_1-b_1+(-1+2r)c\right], \\ b_0=a_0-c_0+2(a_1-b_1-c), \end{cases}$$

其中 $\triangle=\frac{13}{25200}r+\frac{11}{840}r^2+\frac{1}{20}r^3-\frac{1}{2}r^4-2r^5$,

$$\triangle_1=-\frac{13}{25200}r+\frac{11}{840}r^2-\frac{1}{20}r^3-\frac{1}{2}r^4+2r^5,$$

$$\triangle_2=-\frac{13}{12600}r+\frac{1}{2}r^3-8r^5.$$

在（11）中若将a_1，b_1代入后式，可顺次求出c_0，a_0，b_0（由c表示出来）. 把由此确定的a_l，b_l，c_l（$l\in\Omega=\{-1,0,1\}$）代入（2）可得含一个参数c且截断误差为$O(h^8)$的方法类。

特别，当取$c=\triangle/r$时，

$$(12)\quad\begin{cases} a_0=\frac{313}{12600}+\frac{23}{84}r+\frac{1}{10}r^2-5r^3-4r^4, \\ a_{-1}=a_1=-\frac{13}{25200}+\frac{11}{840}r-\frac{1}{20}r^2-\frac{1}{2}r^3+2r^4, \\ b_0=\frac{313}{6300}-r^2+16r^4, \\ b_{-1}=b_1=-\frac{13}{12600}+\frac{1}{2}r^2-8r^4, \\ c_0=-\frac{313}{12600}+\frac{23}{84}r-\frac{1}{10}r^2-5r^3+4r^4, \\ c_{-1}=c_1=\frac{13}{25200}+\frac{11}{840}r+\frac{1}{20}r^2-\frac{1}{2}r^3-2r^4. \end{cases}$$

于是我们得到截断误差为$O(h^8)$的差分格式为：

$$\left(\overline{c_{10}}=\frac{1}{15}r^8-\frac{3}{400}r^6+\frac{1}{7200}r^4-\frac{59}{127008000}r^2\neq 0\right)$$

$$\left(\frac{313}{12600}+\frac{23}{84}r+\frac{1}{10}r^2-5r^3-4r^4\right)u_j^{k+1}+\left(\frac{-13}{25200}+\frac{11}{840}r-\frac{1}{20}r^2+2r^4\right)\left(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{313}{6300}-r^2+16r^4\right)u_j^k+\left(\frac{-13}{12600}+\frac{1}{2}r^2-8r^4\right)\left(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k\right)+$$
$$+\left(\frac{-313}{12600}+\frac{23}{84}r-\frac{1}{10}r^2-5r^3+4r^4\right)u_j^{k-1}+\left(\frac{13}{25200}+\frac{11}{840}r+\frac{1}{20}r^2-\frac{1}{2}r^3-2r^4\right)\left(u_{j+1}^{k-1}+u_{j-1}^{k-1}\right) \tag{13}$$

与格式（10）证明稳定性的方法相同，用$u_j^k=u_j^k$与（13）联立成方程组，用分离变量法得传播矩阵

$$G_1(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} H & N \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H=\frac{\left(\frac{313}{6300}-r^2+16r^4\right)+\left(-\frac{13}{6300}+r^2-16r^4\right)\cos\sigma h}{\left(\frac{313}{12600}+\frac{23}{84}r+\frac{1}{10}r^2-5r^3-4r^4\right)+\left(\frac{-13}{12600}+\frac{11}{420}r-\frac{1}{10}r^2-r^3+4r^4\right)\cos\sigma h},$$

$$N=\frac{\left(\frac{-313}{12600}+\frac{23}{84}r-\frac{1}{10}r^2-5r^3+4r^4\right)+\left(\frac{13}{12600}+\frac{11}{420}r+\frac{1}{10}r^2-r^3-4r^4\right)\cos\sigma h}{\left(\frac{313}{12600}+\frac{23}{84}r+\frac{1}{10}r^2-5r^3-4r^4\right)+\left(\frac{-13}{12600}+\frac{11}{420}r-\frac{1}{10}r^2-r^3+4r^4\right)\cos\sigma h}.$$

$G_1(\sigma,\tau)$的特征方程为$\lambda^2-H\lambda-N=0$，特征根按模小于等于1的充要条件为$|-H|\leqslant 1-N$，$|-N|\leqslant 1$．解此不等式组得$r\leqslant\frac{1}{2\sqrt{5}}$。此为稳定的必要条件。当$r=\frac{1}{2\sqrt{5}}$且$\sin\frac{2\sigma h}{2}=0$时，$G_1(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，易由数学归纳法知$G_1^n(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix}$．故$\{G_1^n(\sigma,\tau)\}$为无界．

由以上论证知，格式（13）稳定的充要条件为$r<\frac{1}{2\sqrt{5}}$．

注记　〔1〕中82页给出的两个高精度格式（8.35）和（8.36），其截断误差给出为$O(h^8)$．事实上，在（8.35）中$\overline{c_6}=-\frac{r^2}{24}+\frac{r}{144}\neq 0$，只有当$r=\frac{1}{6}$时$\overline{c_6}=0$（注意$r=\frac{1}{6}$时（8.35）不稳定）。故（8.35）的截断误差应为$O(h^4)$．

当我们取$l\in\Omega=\{-2,-1,0,1,2\}$并使$\overline{c_i}=0$（$i=0,1,\cdots,5$），令$a_{-1}=a_1==a_1=a_{-2}=a_2=0$，$a_0=1$，$b_{-1}=b_1$，$b_{-2}=b_2$，$c_{-1}=c_1$，$c_{-2}=c_2$时即得（8.36）．此时$\overline{c_6}=\frac{r^3}{4}-\frac{r^2}{12}+\frac{r}{144}\neq 0$．与（8.35）同样，当$r=\frac{1}{6}$时$\overline{c_6}=0$（$r=\frac{1}{6}$时（8.36）不稳定）．故（8.36）也是一个截断误差为$O(h^4)$的格式．

参 考 文 献

〔1〕B、K、萨乌里耶夫，抛物型方程的网络积分法（1963）．〔2〕R、D、里奇特迈尔，初值问题的差分方法（1966）．〔3〕李荣华、冯果忱，微分方程数值解法．