在L^2空间上用插值型算子逼近的一个注记*

谢敦礼

（杭州大学）

设定义在$[a,\ b]$上的权函数$W(x)$满足$W(x)>0$ $(a,\ e)$ 和$\int_a^b W(x)\ \mathrm{d}x<+\infty$；以

$$(a<)\ x_n^{(n)}<x_{n-1}^{(n)}<\cdots<x_1^{(n)}\ (<b)$$

表示对应于权函数$W(x)$的直交多项式$\omega_n(x)$的零点$(n=1,2,\cdots,)$；又设$x_0^{(n)}=b,\ x_{n+1}^{(n)}=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\max\limits_{1<k<n+1}(x_{k-1}^{(n)}-x_k^{(n)})=0$，$0<h_k^{(n)}=\theta\cdot(x_{k-1}^{(n)}-xk^{(n)})$，$\theta$是$(0,\ 1]$内的一个确定的数，并记$x_k=x_k^{(n)}$ $h_k=h_k^{(n)}$；函数$l_k(x)=l_k^{(n)}(x)=\dfrac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$是Lagrange插值基本多项式；又记$\lambda_k=\lambda_k^{(n)}=\int_a^b l_k(x)\ W(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b l_k^2(x)\ W(x)\mathrm{d}x,(k=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots)$

$$\lambda_k=\lambda_k^{(n)}=\int_a^b l_k(x)\ W(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b l_k^2(x)\ W(x)\ \mathrm{d}x,\quad (k=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots),$$

$$a_n=\max_{1<k<n+1}h_k^{(n)},\quad d_n=\max_{1<k<n}\lambda_k^{(n)}/h_k^{(n)}.$$

设$f(x)\in L^2[a,\ b]$，C.Balags在[1]里研究了插值型算子：

$$L_n^*(f,\ x)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}f(t)\ \mathrm{d}t\cdot l_k(x),\quad (n=1,2,\cdots).$$

在L^2空间上逼近函数$f(x)$的阶，他主要证明了以下的

定理A 设$W(x)<c$,$\sup\limits_n d_n\leqslant c$，则对于任何$f(x)\in L^2[a,\ b]$有

$$\left\{\int_a^b[f(x)-L_n^*(f,\ x)]^2W(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant c\cdot\omega(f,\ a_n^{\frac14})_2.$$

其中$\omega(f,\ \delta)_2$表示$f(x)$的L^2-连续模，为了简便今后用c表示与x、k和n无关的常数，但各处的数值未必相同.

我们发现，C.Balazs的结果是可以改进的，得着了以下的

定理 在定理A的条件下，对于任何$f(x)\in L^2[a,\ b]$有

$$\left\{\int_a^b[f(x)-L_n^*(f,\ x)]^2W(x)\ \mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant c(\omega(f,\ a_n^{\frac13})_2+a_n^{\frac13}\|f\|_2)\tag{1}$$

如果$f(x)\in \mathrm{Lip}\alpha(0<\alpha\leqslant1)$，则

$$\left\{\int_a^b[f(x)-L_n^*(f,\ x)]^2W(x)\ \mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant c\cdot a_n^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\tag{2}$$

其中$\|\cdot\|_2$表示L^2范数.

显然(1)式改进了定理A，(2)式也同样改进了[1]中不等式(16).

定理的证明 设$P_m(x)(m<n)$是$f(x)$在$L^2[a,\ b]$中的最佳逐近多项式,则根据L^2上的Jackson定理，容易得到

$$\left\{\int_a^b[f(x)-P_m(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}=E_m(f)_2\leqslant c\cdot\omega(f,\ \frac{1}{m})_2.$$

我们首先利用Minkowski不等式，可以得到

$$I=\left\{\int_a^b[f(x)-L_n^*(f,\ x)]^2W(x)\ \mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant\ \left\{\int_a^b[f(x)-P_m(x)]^2W(x)\ \mathrm{d}x\right\}^{\frac12}+$$

* 1983年9月22日收到.

$$\left\{\int_a^b [P_m(x)-L_n^*(P_m x)]^2 W(x)\,dx\right\}^{1/2}+\left\{\int_a^b [L_n^*(P_m, x)-L_n^*(f, x)]^2 W(x)\,dx\right\}^{1/2}=$$

$I_1+I_2+I_3$. （22）

由$W(x)\leqslant c$，易得

$$I_1\leqslant c\,\|f-P_m\|_2\leqslant c\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)_2 \quad (4)$$

对于I_2，我们注意到当$m<n$时有$P_m(x)=\sum_{k=1}^{n}P_m(x_k)\,l_k(x)$，并且利用直交性和Schwartz不等式，可以得到：

$$I_2^2=\int_a^b \left[P_m(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}P_m(t)\,dt\cdot l_k(x)\right]^2 W(x)\,dx=$$

$$\int_a^b \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}[P_m(x_k)-P_m(t)]\,dt\cdot l_k(x)\right\}^2 w(x)\,dx=$$

$$\int_a^b\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k^2}\left[\int_{x_k}^{x_k+h_k}\left(\int_{x_k}^{t}P'_m(u)\,du\right)dt\right]^2 l_k^2(x)\,W(x)\,dx=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k^2}\left[\int_{x_k}^{x_k+h_k}P_m(u)\left(\int_u^{x_k+h_k}dt\right)du\right]^2\lambda_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_k}^{x_k+h_k}|P'_m(u)|\,du\right]^2\lambda_k\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_k+h_k}|P'_m(u)|^2du\cdot h_k\lambda_k\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}h_k^2\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\lambda_k}{h_k}\int_a^b|P'_m(u)|^2du=a_n^2d_n\cdot\|P'_m\|_2^2$$

Н. К. Барц在［2］里证明了L^p（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上的Марков不等式：

$$\|P'_m\|_p\leqslant cm^2\|P_m\|_p,$$

其中$\|\cdot\|_p$表示L^p范数，由此即得

$$I_2\leqslant c\,d_n^{\frac{1}{2}}a_nm^2\|P_m\|_2\leqslant c\,d_n^{\frac{1}{2}}a_nm^2\|f\|_2 \quad (5)$$

相仿地

$$I_3^2=\int_a^b\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}[p_m(t)-f(t)]\,dt\cdot l_k(x)\right\}^2 W(x)\,dx=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k^2}\left\{\int_{x_k}^{x_k+h_k}[p_m(t)-f(t)]\,dt\right\}^2\lambda_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}[p_m(t)-f(t)]^2dt\leqslant$$

$$d_n\int_a^b[p_m(t)-f(t)]^2dt\leqslant d_n\cdot c\cdot\left[\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)_2\right]^2. \quad (6)$$

因为$d_n\leqslant c$，综合（3）—（6），就可以得到：

$$I\leqslant c\left(\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)_2+a_n\cdot m^2\|f\|_2\right) \quad (7)$$

选取$m=1/a_n^{\frac{1}{3}}$，容易见到$m<n$，并且由（7）式得到（1）式。

如果$f(x)\in \mathrm{Lip}\alpha\,(0<\alpha\leqslant1)$，则$\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)_2\leqslant c/m^\alpha$，因此只要选取$m=a_n^{-\frac{1}{2+\alpha}}$，就可以得到（2），定理证毕。

例 设$W(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$（$\alpha, \beta\geqslant0$，$-1\leqslant x\leqslant1$）；$x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1$表示以$W(x)$为权的Jacobi多项式的零点，这时$0<W(x)<1$，$\int_{-1}^{1}W(x)\,dx<+\infty$。在［3］里G. Szegö指出：

$$\lambda_k\leqslant c\cdot\frac{k}{n^2}\ (k=1,2,\cdots,n),\quad h_k=\theta\,(x_{k-1}-x_k)\sim c\cdot\frac{k}{n^2}\ (k=1,2,\cdots,n).$$

其中$\theta\in[0, 1]$是预先给定的一个常数。于是$d_n\leqslant c$满足，并且$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$。应用上述定理，立即可得

$$\left\{\int_{-1}^{1}[f(x)-L_n^*(f, x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant c\omega(f, 1/n^{\frac{1}{3}})_2, \quad (8)$$

特别，当$\alpha=\beta=0$ 时，有$W(x)\equiv 1$，相应的结点是Legendre多项式的零点，取$h_k=x_{k-1}-x_k$，即得

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k-1}-x_k}\int_{x_k}^{x_{k-1}}f(t)\,dt\cdot l_k(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant c\omega\left(f,\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)_2 \qquad (9)$$

以上（8）、（9）两式分别改进了［1］中（6）、（7）两个阶的估计式.

当α或$\beta<0$时，虽然条件$d_n\leqslant c$不能满足，但是，只要直接由（4）、（5）、（6）三式，仍然可以求出插值型算子逐近的阶，此地从略. （当然假设α，$\beta>-1$）.

参 考 文 献

［1］C.Balazs., Approximation in L_2—space by interpolatory type operators., Acta.Math.Acad.Sci.Hung, 35(3—4) 1980, 403—408 .

［2］Н. К. Барц, Обобщенце нераьенсмь С. Н. Бернштейна и А. А. маркова., Uzb. A. H.CCCP, 18(1954) 159—176 .

［3］G.Szegö., Orthogonal Polynomials., Amer Math.Soc.Coll.Publ., 1967.