强大数定律成立的充要条件

傅顺良

（北京5102信箱）

定理 设 $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ 是任意随机变量序列，则强大数定律对之成立，即 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)=0\}=1$ 的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\{[\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)]^2/[n^2+(\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))]^2\}<\infty$.

证明 充分性 令 $\eta_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)$，$P(|\eta_n|\geq\varepsilon)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\{[\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)]^2/[n^2+(\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))]^2\}<\infty$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}E\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}<\infty.$$

由Borel—Cantelli 引理即得$P\{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)=0\}=1$

必要性 若不然，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}=\infty$. 因为$P\{|\eta_n|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}\}=\int_{|x|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}}dF_n(x)\geq\int_{|x|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}}\frac{x^2}{1+x^2}dF_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_n(x)-\int_{|x|<\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}}\frac{x^2}{1+x^2}dF_n(x)\geq E\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}-\frac{\varepsilon^2}{2^n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^2}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{|\eta_n|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}\}$. 这样，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{|\eta_n|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{\frac{1}{n}\cdot\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n/2}}\}=\infty$. 所以存在自然数 $p(n)$ 使得：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{p(n)}P\left\{\left|\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n+m/2}}\right\}\neq 0.$$

但 $\{\left|\frac{1}{n+p}\sum\limits_{k=1}^{n+p}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n+p/2}}\}\subset\{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(|\frac{1}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|\geq\frac{\varepsilon}{2^{j/2}})\}$，其中 $p=1,2,\cdots,p(n)$，所以

$$p(n)\cdot P\left\{\bigcup_{j=n}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2^{j/2}}\right)\right\}\geq\sum_{m=1}^{p(n)}P\left\{\left|\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m}(\xi_k-E\xi_k)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2^{n-m\,2}}\right\}.$$

在上式两边同时取$n\to\infty$时的极限，右边不为零，故$\lim\limits_{n\to\infty}p(n)\cdot P\{\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}(|\frac{1}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|\geq\frac{\varepsilon}{2^{j/2}})\}>0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}(|\frac{1}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|\geq\frac{\varepsilon}{2^{j/2}})\}>0$. 但强大数定律成立时 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}(|\frac{1}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|\geq\frac{\varepsilon}{2^{j/2}})\}=0$. 这样就有矛盾，于是证明了必要性.

* 1985年4月28日收到.