1986年7月 数学研究与评论 第六卷 第三期

关于M/G/I随机服务系统中L. Takacs引理的证明*

李文琦

（天津师范专科学校）

在L. Takacs〔1〕第47页给出一条引理，它是研究M/G/1系统的重要工具，近年来仍为许多作者所引用（参看韩继业〔2〕和徐光辉、颜基义〔3〕)它的内容是

Takacs 引理 若$R(s)\geqq 0$和$|w|\leqq |$，则方程

$$z=w\psi(s+\lambda(1-z)) \tag{1}$$

的绝对值最小的根$z=\gamma(s, w)$可展成Lagrange级数

$$\gamma(s, w)=w\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-\lambda w)^{j-1}}{j!}\left(\frac{d^{j-1}[\psi(\lambda+s)]^j}{ds^{j-1}}\right) \tag{2}$$

成等价地

$$\gamma(s, w)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}\omega^j}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}dH_j(x) \tag{3}$$

其中$H_j(x)$是$H(x)$的j重自卷积.

在$R(s)\geqq 0$和$|w|\leqq 1$内，它是s和w的连续函数．此外，若（i）$R(s)\geqq 0$，$|w|<1$；或（ii）$R(s)>0$，$|w|\leqq 1$；或（iii）$R(s)\geqq 0$，$|w|\leqq 1$且$\lambda a>1$，则$z=r(s, w)$是方程（1）在$|z|<1$内的唯一解，特别，$w=r(0, 1)$是方程

$$w=\psi(\lambda(1-w)). \tag{4}$$

的最小正根．若$\lambda a>1$则$w<1$，若$\lambda a\leq 1$则$w=1$.

记号见[1]第46—47页．λ是Poisson输入的强度，$H(x)$是服务时间的分布函数，$a=\int_0^{\infty}x dH(x)$是平均服务时间．$\psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dH(x)$是$H(x)$的Laplace变换．

〔1〕第48页关于情形（iii）的论证是准确的．关于情形（i）和（ii）的论证不准确．这是因为原书断言，对一切足够小的$\varepsilon>0$，

$$|w\psi(s+\lambda(1-z))|<1-\varepsilon \text{ 在 } |z|=1-\varepsilon$$

再利用Rouche定理肯定方程（1）在$|z|=1-\varepsilon$内部恰有一个根．但上述不等式不一定成立．例如在情形（ii)，当$s>0$，$z=1-\varepsilon$，$w=1$时，上述不等式化为$\psi(s+\lambda\varepsilon)<1-\varepsilon$令$s\downarrow 0$得$\psi(\lambda\varepsilon)\leqq 1-\varepsilon$令$\varepsilon\to 0+$，得$-\lambda a\leqq -1$或$\lambda a\geqq 1$，而这并非原假设．关于这一点，徐光辉〔4〕第60页（i），(ii)论述是准确的，但应指出一点．在情形（i），我们不能求助于例如L. Takacs〔1〕第324页给出的Rouche定理：若$f(z)$和$g(z)$在闭围道C内上（inside and on）解析，在C上$|g(z)|<|f(z)|$，则$f(z)$和$f(z)+g(z)$在C内部有相同个数的零点，这是因为，当$R(s)\geq 0$，$|w|<1$时，虽然在$|z|=1$上

* 1982年6月7日收到。

$|w\psi(s+\lambda(1-z))|<|\psi(s+\lambda(1-z))|\leq|z|$，在 $|z|=1$，$w\psi(s+\lambda(1-z))$不一定解析：当 $s=0$ $z=1$ 时，$s+\lambda(1-z)=0$ 而$\psi(s)$ 在 $s=0$ 可能不解析，事实上，由Vivanti-Pringsheim定理，$\psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}H(x)$ 的收敛横坐标是$\psi(s)$ 的奇点．（看D. V. Widder〔5〕第58页）由于$H(x)$ 是任意的，当然也包括以 $s=0$ 为其Laplace变换的收敛横坐标的分布函数．为此我们只需任取一个满足$H(0)=0$，$H(x)<|$当$x>0$，$H(+\infty)=1$，$\int_0^{\infty}x\mathrm{d}H(x)=a<\infty$和

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-H(x+y)}{1-H(x)}=1\qquad\forall y\in\mathbf{R}_1=(-\infty,\ +\infty)\qquad(5)$$

的$H(x)$，对于这样的$H(x)$，$s=0$恰好是其Laplace变换$\psi(s)$ 的横坐标（看P Embrechts et al.〔6〕)或者，我们也可以取任一数学期望有穷的次指数分布$H(x)$：即$H(x)$满足$H(0)=0$，$H(x)<1$ 当$x>0$，$H(+\infty)=1$，和

$$\lim\frac{1-H_2(x)}{1-H(x)}=2\qquad(6)$$

其中$H_2(x)=H(x)*H(x)$ 是$H(x)$ 的二重自卷积．可以证明满足（6）的分布函数必满足（5）Чистяков 1964年证明了这种分布的Laplace变换在 $s=0$ 不解析（看文献〔7〕）此外我们还可以取任一满足$H(0)$ - $H(x)>0$ 当 $x>0$，$H(+\infty)=1$，$a=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}H(x)<\infty$和

$$1-H(x)\backsim(-\rho\mathrm{L}(x)\qquad(x\to\infty)\quad(\rho\geq0)\qquad(7)$$

的分布函数$H(x)$，其中$\mathrm{L}(x)$ 是在∞缓慢变化的函数．即对于任一$\lambda>0$，$\lim_{x\to\infty}\mathrm{L}(\lambda x)/L(x)=1$．可以证明满足（7）的分布函数必满足（6）．（看W. Feller〔8〕第278页）下给出一个满足（7）从而也满足（6）和（5）的分布函数：$H(x)=0$，$x\leq0$；$H(x)=1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$，$x>0$．容易看出，它的Laplace变换$\psi(s)$ 对任一负数 s 发散．为了克服上述困难，只需求助于下述形式的Rouche定理．（看S. Saks和A. Zygmund〔9〕节157页）

“广义”Rouche定理：若$f(z)$ 和$g(z)$ 在闭集F上连续，在F°（F的内点的集）内解析．且在F的边界∂F上$|g(z)|<|f(z)|$，则在F°内$f(z)$ 与$f(z)+g(z)$ 有相同个数的零点．

于是对于情形（i）或（ii)或（iii)，方程（1）在$|z|<1$ 内恰有一个根的问题就都解决了．

下面再讨论把方程（1）的根$y(s,w)$ 展成Lagrange级数的问题．在情形（i），(ii)或(iii)，$y(s,w)$是方程(1)在$|z|<1$内的唯一解．令$\zeta\equiv s+\lambda(1-z)$，则方程（1）化为

$$\zeta=\lambda+s-\lambda w\psi(\zeta)\qquad(8)$$

Takacs在〔1〕在235页给出下列形式的Lagrange定理：若$f(z)$ 和$\varphi(z)$ 在一围绕点 a 的闭围道C内与上解析．在C上不等式$|w\phi(z)|<|z-a|$成立．则方程$\zeta=a+$ $+w\phi(\zeta)$（看作是ζ的方程）在C内恰有一个根ζ 且

$$f(\zeta)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\{f'(a)[\phi(a)]^n\}\qquad(9)$$

在情形（ii），即$R(s)>0$，$|w|\leqq 1$的情形，令$a=\lambda+s$，$\phi(z)=\psi(z)$，C为圆周$|z-(\lambda+s)|=\lambda$ $w'=-\lambda w$，则在C上$|w'\phi(z)|=|(-\lambda w)\phi(z)|<\lambda=|z-(\lambda+s)|$.由于圆周C整个位于右半平面内部，$\psi(s)$在C内上解析，由上面给出的Lagrange定理立即得到方程（8）在$|\zeta-(\lambda+s)|=\lambda$内部的唯一解$\zeta$的Lagrange级数展开式：

$$\zeta=(\lambda+s)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-\lambda w)^j}{j!}\frac{d^{j-1}}{dy^{j-1}}[\psi(y)]^j\Big|_{y=\lambda+s}$$

转化为z，知（1）在$|z|<1$内部的唯一解$r(s,w)$可表为

$$\gamma(s,w)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\lambda^{j-1}w^j}{j!}\frac{d^{j-1}}{dy^{j-1}}[\psi(y)]^j\Big|_{y=\lambda+s}$$

即（2），它又可写作

$$\gamma(s,w)=\sum_{j-1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}w^j}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}dH_j(x)$$

即（3）.

在情形（iii），即$R(s)\geq 0$，$|w|\leq 1$ $\rho=\lambda a>1$的情形把圆周$|z-(\lambda+s)|=\lambda-\varepsilon$，$\varepsilon$足够小正数，看作是闭围道C，其它情形与（ii）类似

在情形（i），即$R(s)\geqq 0$，$|w|<1$的情形，一切都和情形（ii)类似，即令$a=\lambda+s$，取$|z-a|=\lambda$作为围道C．由于$|\psi(z)|\leq 1$当$R(z)\geqq 0$，在C上仍然有

$$|w'\psi(z)|=|-\lambda w\psi(z)|<|\lambda\psi(z)|\leq\lambda=|z-a|$$

但这时$\psi(z)$在$z=0$可能不解析．而当$s=0$时，$|z-a|=\lambda$化为$|z-\lambda|=\lambda$．故$z=0$位于圆周C上．即$\psi(z)$可能不满足上面提到的Lagrange定理的条件$s=i\tau$，$\tau\neq 0$，时也有类似的问题，为了克服上述困难我们证明一个

特殊Lagrange定理：设$\varphi(z)$在包含点a的可度长约当曲线C内部解析，在C内上连续，$f(z)$在包含C及其内部的区域上解析．设$|w|M<1$ 在此$M=\max\limits_{z\in C}\left|\frac{\phi(z)}{z-a}\right|\neq 0$，则$|w\phi(z)|<|z-a|$在C上成立．令$G(z)=f(z)[1-w\phi'(z)]$当$z$位于C的内部，并设$G'(z)$可以连续的展拓到C上去，即$\lim\limits_{z\to\zeta}f(z)[1-w\phi'(z)]$在每一点$\zeta\in C$存在．且扩充后的$G(z)$在C内上连续，则在C内部方程$\zeta=a+w\phi(\zeta)$恰有一个根$\zeta$且

$$f(\zeta)=f(a)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w^j}{j!}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[\phi(z)]^j\Big|_{z=a}$$

如果上述特殊Lagrange定理得证，我们在情形（i）所碰到的困难就被克服了．事实上，若在$s=0$，$\psi(s)$不解析，由于$\int_0^{\infty}x\,dH(x)=a<\infty$，极限$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\R(z)>0}}\psi'(z)=\int_0^{\infty}(-x)dH(x)=-a$．存在且有穷，于是

$$G(z)=\begin{cases}f(z)[1-w\psi'(z)] & |z-\lambda|<\lambda\\ \lim\limits_{\substack{\zeta\to z\\|\zeta-\lambda|<\lambda}}f(\zeta)[1-w\psi(\zeta)] & |z-\lambda|=\lambda\end{cases}$$

在$|z-\lambda|\leq\lambda$上连续，在$|z-\lambda|<\lambda$内解析，对于C：$|z-\lambda|=\lambda$，$M=\max\limits_{z\in C}\left|\frac{\psi(z)}{z-\lambda}\right|=\frac{1}{\lambda}\neq 0$，而$|w|<1$时$|w'|=|-\lambda w|<\lambda=\frac{1}{M}$，∴$|w'M|<1$，于是对于C，特殊

Lagrange定理的条件被满足剩下的只是证明上述特殊Lagrange定理．我们利用Rouche1861年证明Lagrange定理时所用的技巧（参看Cartheodory〔9〕第233 页）．

特殊Lagrange定理之证：由于 $|w|M<1$，$|w\phi(z)|<|z-a|$，当 $z\in C$．又 $\varphi(z)$ 在C内解析在C上连续，由广义Rouche定理，$F(z)=(z-a)-w\phi(z)$ 在C内部恰有一个根 ζ，从而 $F(\zeta)\neq 0$．考虑函数 $G(z)/F(z)$，它在曲线C内部唯一可能的奇点出现于 ζ．若 ζ 是奇点，则 ζ 是 $G(z)/F(z)$ 的简单极点，从而 $G(z)/F(z)$ 在 ζ 的残数是 $G(\zeta)/F'(\zeta)$．任取约当曲线 γ，它全部位于曲线C的内部同时使得 a 与 ζ 都包含在 γ 的内部．则

$$\frac{G(\zeta)}{F'(\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{G(z)}{F(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{G(z)}{F(z)}dz \tag{9}$$

（9）式第二个等式之成立系根据Cauchy定理（看普里瓦洛夫〔10〕第169页）当 $z\in C$ 时，$\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{(z-a)-w\varphi(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n\varphi^n(z)}{(z-a)^{n+1}}$．由于 $|w|M<1$，此级数在C上一致收敛，把它代入（9）式右端并逐项积分，得

$$G(\zeta)/F'(\zeta)=K_0+K_1w+\cdots+K_nw^n+\cdots \tag{10}$$

其中 $K_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{G(\zeta)[\phi(z)]^n}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{G(z)[\phi(z)]^n}{(z-a)^{n+1}}dz$．上述级数在 $|w|<\frac{1}{M}$ 内收敛．事实上，令 $\max\limits_{z\in c}(|G(z)|/|z-a|)=2\pi M_0$，C的长度为 L_C 则 $|K_nw^n|<M_0L_C$，$n=1, 2, \cdots$ 再利用〔10〕§205 的推理，由 K_n 的表达式知

$$K_0=G(a)\ ,\ K_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}\{G'(a)[\phi(a)]^n\}\ .$$

于是最后得

$$G(\zeta)/F'(\zeta)=G(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}\{G(a)[\phi(a)]^n\}w^n$$

但 $G(z)=f(z)F'(z)=f(z)[1-w\phi'(z)]$ 在C内部解析，且 γ 位于C的内部，把 $G(z)$ 的表达式代入到积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{G(z)[\varphi(z)]^n}{(z-a)^{n+1}}dz$ 中去．得

$$G(\zeta)/F'(\zeta)=f(\zeta)\ ,\ K_n=K_n'-wK_n'' \tag{11}$$

其中

$$K_n'=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}[f(a)[\varphi(a)]^n],\qquad K_n''=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}[f(a)\varphi'(a)\phi(a)^n]$$

我们也可以写

$$K_{n-1}''=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f(a)\varphi(a)^n]=K_n'-\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{f(a)[\varphi(a)]^n\}$$

于是由（10）和（11），得

$$f(\zeta)=(K_0'-wk_0'')+(k_1'-wk_1'')w+\cdots=k_0+k_1w+k_2w^2+\cdots$$

其中

$$k_0=f(a),\ k_n=k_n'-k_{n-1}''=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f'(a)\varphi(a)^n]$$

特殊Lagrange定理证毕．

至此，在情形（i），（ii）和（iii），方程（1）在$|z|<1$内唯三解$y(s, w)$展成Lagrange级数的问题是全部解决了．由于级数（3）在$R(s)\geqq 0$，$|w|\leqq 1$内被正项级数$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)$所控制．而上述级数之和$w\leqq 1$，故$y(s, w)$在情形（i），（ii）或（iii）都是对应的区域内的二元连续函数．应当指出，徐光辉〔5〕在证明$w\leqq 1$时，利用了$y(0, w)$，$|w|<1$，是方程$z=w\psi(\lambda(1-z))$在$|z|<1$内的唯一解．（从而利用了广义Rouche定理）．还利用了$y(0, w)$的Lagrange级数展开（从而稍嫌根据不足）在有了上面证明的特殊Lagrange定理之后，〔5〕中的论述已无瑕可击了．现在要问，如果不利用广义Rouehe定理，而只利用例如Takacs〔1〕第324页所给出的Rouche定理，我们能否证明$w\leqq 1$？回答是肯定的．事实上，对于$s>0$，和$0<w<1$，利用通常的Rouche定理和Lagrange定理，有

$$0<y(s, w)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}w^j}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)<1$$

由Abel定理，得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)=\lim_{w\uparrow 1}y(s, w)\leqq 1 \qquad (s>0)$$

令$s\downarrow 0$，由控制收敛定理得

$$\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)\uparrow\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)$$

再由单调收敛定理（把级数看作是关于计数测度的积分）得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+s)x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)\uparrow\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)$$

从而$w=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)\leq 1$．于是级数（3）在$R(s)\geqq 0$ $|w|\leqq 1$内表示一二元连续函数，它可看作是$y(s, w)$的连续延拓，延拓后的$y(s, w)$ （$R(s)\geqq 0$ $|w|\leqq 1$）仍然满足方程（1）．特别$s=0$，$w=1$时

$$y(0, 1)=w=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}x^{j-1}\mathrm{d}H_j(x)$$

是方程$w=\psi(\lambda(1-w))$的根．由徐光辉〔5〕第61页知最后的方程在〔0，1〕内恰有一个根w且$\rho=\lambda a>1$时，$w<1$，$\rho=\lambda a\leqq 1$时，$w=1$．$y(0, 1)$有了定义徐光辉〔5〕第62页（b）的论证可以简化了．

注：我们评论也适用于Takacs引理的许多变体，例如〔1〕第62页引理1．

参 考 文 献

〔1〕Takacs, L., Introduction to the Theory of Queues, OXford Univ. Press, New York, 1962.
〔2〕韩续业，输入依赖于队长的随机服务系统的瞬时性质和最优化，应用数学学报，1（1978），59—72.
〔3〕徐光辉、颜基义，随机服务系统中的首达时间，应用数学学报，3：4 （1980），34—40.

〔4〕徐光辉，随机服务系统，北京，1980.
〔5〕Widder, D. V. , The Laplace transform, Princeton, 1946.
〔6〕Embrechts P. and Charles, M. Goldie, on convolution tails, University of London (Westfield college) - proprint, Feb (1980).
〔7〕Чистяков, В.п., Теорема о суммох Иезэвиснмъхк Лоложительных слуцайных Величнн И ее Приложение к Ветвящимся случайным ПроцессАМ, Теор Вероят. и ее Прим., Ⅸ4(1964), 710—718.
〔8〕Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its applications, Vol Ⅱ, and ed., New York, 1971.
〔9〕Saks, S. and Zygmund, A., Analylic functions, warszawa, 1952.
〔10〕Caratheodory, C., Theoy of Functions of a Complex Variable, Vol 1, New York, 1958.
〔11〕普里瓦洛夫И. И. 复变函数引论，上海，1978.

On the Proof of Takacs Lemma In the Stochastic Service System M/G/1

Li Wenqi

(Hebei University)

Abstract

L. Takacs' Lemma (ef〔1〕pp47—48) is a very important tool for the investigation of the transicnt behavior of the M/G/1 System. But the original proof contains a gap when $y(s, w)$ is expanded into Lagrange series by means of Lagrange theorem as given in the appendix of〔1〕. This is due to the fact that $\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dH(x)$, the Laplace transform of the service time distribution $H(x)$, may not be analytic at $s=0$. An example of such a distrbution function $H(x)$ is gives and a specific Lagrange theorem is proved By using this specific theorem, the gap in the original proof of Takacs' Lemms is eliminated.