# 最近邻密度估计强一致收敛性的必要条件问题*

许 冰

（宁波师范学院）

设$X_1$，…，$X_n$为取自具有分布密度$f$中的$iid$.样本，1965年Loftsgarden等提出一个常称为“最近邻估计”的

$$f_n(x)=k_n/2na_n(x) \qquad x\in R^1$$

去估计$f(x)$，关于$f_n$的收敛性质已有不少的研究，到1977年Devroye等（见Ann.Statist.,5（1977），p.536）得到了最佳结果.

若 i）$f$在$R^1$上一致连续，ii）$\lim\limits_{n\to\infty}k_n/n=0$，iii）$\lim\limits_{n\to\infty}k_n/\log n=\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_x|f_n(x)-f(x)|)=0 \qquad (1)$$

关于本结果之逆，即（1）成立的必要条件，柴根象，陈希孺（见中国科大学报83.4.407）分别证得：条件i）是必要的，条件$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=\infty$及ii）也是必要的.那末条件iii）是否也是必要？这是陈希孺教授提出的问题，也是最近邻密度估计强一致收敛性必要条件的最后一个问题.最近我们讨论了这一问题，并给这一问题以肯定的回答.

事实上，为证得iii）的必要性，还可以把$k_n\to\infty$的速度放慢：由限制$k_n=o(n)$改为限制$k_n=o(n^{1/2})$，具体地说，我们有

**定理** 若（1）成立.当$n\to\infty$时，$k_n\uparrow\infty$，$k_n^2/n\to0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}k_n/\log n=\infty$.

**定理1** 若$\lim\limits_{n\to\infty}k_n/n=0$，$f$在$R^1$上一致连续，则$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_x\dfrac{na_n(x)}{\log n}=\infty$成立的充要条件为$\lim\limits_{n\to\infty}k_n/\log n=\infty$.

*1986年4月14日收到.