Orlicz空间研究进展（Ⅰ）*

吴从炘　　王廷辅
（哈尔滨工业大学）（哈尔滨科技大学）

自从W. Orlicz在1932年提出，后来以他的名字命名的空间出现以来，已经过去了半个世纪；M. A. Красносельский 和Я. Б. Рутицкий的第一部专著[1]也已问世26年. 在此期间，这一学科取得很大进展：一方面，空间理论日趋完善，同时不断开拓新方向，进行各种推广和深化，为一般的Banach空间、Frechet空间和线性拓扑空间研究提供丰富的背景材料；另一方面，除继续应用于积分方程，还成功地应用于偏微分方程、变分法，实函数论、复函数论以及概率论等众多领域。有关文献已逾千篇。致力于这一学科的我国数学工作者早在六十年代就多有建树，近年又涌现一批年轻的同志，做出许多有意义的工作。本文作者撰写的专著[2]已经收进了二十几年来的部分成果。本文将着重介绍未收进[2]，特别是[2]定稿之后出现的新成就。全文分Orlicz空间理论和Orlicz空间应用两部分。每部分后面的文献目录仅限于文中直接涉及的。

Ⅰ Orlicz空间理论

O·N函数

N函数$M(u)$ 的性质同赖其产生的Orlicz空间L_M^*的性质息息相关，[1]曾开辟专章详加讨论满足各种增长条件的N函数。[1]作者留下一个有意思的问题：$M(u)$ 满足某条件△等价于其余函数$N(v)$ 满足什么样的条件▽？1960年T. Ando[3]已给出圆满回答。这就是：

$\triangle_2$: $M(2u)\le kM(u)$	∇_2: $2kN(v)\le N(kv)$
$\triangle'$: $M(uv)\le kM(u)\ M(v)$	∇': $N(u)\ N(v)\le N(kuv)$
$\triangle_\varphi$: $\varphi(M(u))\le M(ku)$	∇_φ: $\dfrac{N^{-1}(v)}{v}\le\dfrac{kN^{-1}(\varphi(v))}{\varphi(v)}$
$\triangle_\varphi^*$: $\varphi\left(\dfrac{M(u)}{u}\right)\le\dfrac{M(ku)}{u}$	∇_φ^*: $\dfrac{N(\varphi(u))}{\varphi(u)}\le\dfrac{kN(u)}{u}$
$\triangle_3$: $uM(u)\le M(ku)$	∇_3: $N^{-1}(v)\ N(v)\le kv^2$
$\triangle^2$: $M^2(u)\le M(ku)$	∇^2: $\dfrac{N(v)}{v}\le\dfrac{kN(v^{1/2})}{v^{1/2}}$

以上均要求存在$k>0$，使不等式对较大的u，v成立。

Салехов[4]又给出介于$\triangle_2$和$\triangle'$之间的$M_\triangle$条件，任重道补上M_∇条件：

$$M_\triangle:\ \lim_{u\to\infty}\frac{\ln M(u)}{\ln u}=p<\infty\qquad M_\nabla:\ \lim_{v\to\infty}\frac{\ln N(v)}{\ln v}=q<1$$

1 经典Orlicz空间的几个基本问题

由普通N函数或Young函数生成的经典Orlicz空间作为Banach空间的一般性问题，如完备性、可分性、列紧性、基、线性泛函表达式和空间包含条件等已经大致澄清。人们转向解决一些更深入的问题。

何种Orlicz空间L_M^*，其范数可以仿照L^p的范数构成方式，取为$M^{-1}(\int_\Omega M(u(x))\,d\mu)$？1982年Zannen[6]断言，上述事实当且仅当$M(u)=M(1)\,u^p(p>1)$成立。同时也证明了当且仅当$M(u)=ku^p(p>1)$，著名的Cooper不等式，即对任何n，$a_\nu, b_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$有

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\le M^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}M(a_\nu)\right)\;N^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}N(b_\nu)\right),$$

为真。这里M，N互余。

1978年Luxemburg[7]提醒人们密切注意Orlicz本人早年发表的论文[8]，认为那里包括若干少为人知的重要结果。其中之一是：L_M^*中子集R相对于拓扑$\sigma(L_M^*, L_N^*)$列紧的充要条件是对任何$\lambda>0$，$\{M(\lambda u): u\in R\}$在L^1中弱紧。

Nikišin关于条件收敛级数的著名定理：若$\sum x_i\,(x_i\in L_p,\ 1\le p\le 2)$条件收敛且$(\sum |x_i|^2)^{1/2}\in L^p$，则级数和（经重排）的集是一个线性流形，被Maleev等[9]移到Orlicz空间，条件是

$$\inf\left\{\frac{u^2M(v)}{M(uv)};\ u\ge 1,\ v\ge 1\right\}>0$$

关于多个空间的乘积和分解由Danker和Konig[10—12]详细讨论过。其代表性结果是$\bigodot_{i=1}^{n}L_{M_i}^*\subset L_M^*$和$L_M^*\subset\bigodot_{i=1}^{n}L_{M_i}^*$的充分必要条件。$\bigodot_{i=1}^{n}L_{M_i}^*=\{u_1u_2\cdots u_n;\ u_i\in L_M^*\ (i=1,2,\cdots,n)\}$。O'Neil Richard[13]讨论了另一种"乘积"——分数化积分。当$M_1^{-1}(u)\ M_2^{-1}(u)\le uM^{-1}(u)$时$x\in L_{M_1}^*$，$y\in L_{M_2}^*$蕴涵$\int_\Omega x(\xi)\ y(\frac{t}{\xi})\ d\xi\in L_M^*$且后者范数不超过$2\|x\|_{M_1}\|y\|_{M_2}$。R.Sharpley等[14—15]随后讨论的对合运算也可视为乘法的引伸。与乘积问题相联系，任重道[16]得到：$L_{M_1}^*\otimes L_{M_2}^*\subset\hat{L}_\phi^*(\hat{E}_\phi)\Leftrightarrow$以$\hat{L}_\phi^*(\hat{E}_\phi)$中函数为核的线性积分算子都是映$L_{M_1}^*$到$L_{M_2}^*(E_{M_2})$的连续（全连续）算子。

Class，Zaanen等[17,18]还讨论了Orlicz空间作为Banach格的具体表示问题。

2 Orlicz序列空间

50年代末 Грибанов[19]开始考察Orlicz序列空间l_M及其子空间h_M，从此形成函数空间与序列空间研究并行前进的局面。序列空间的基本属性以及作用于其间的无穷矩阵算子、非线性算子的讨论一直持续至今[20—25]。关于l_M的最出色的工作是嵌入理论和基的理论，Lindenstrass和Tzafriri的三篇论文[26—28]不仅结果整齐，意义深刻而且方法新颖。其主要定理是

A 对于任何l_F，有$p\ge 1$，l^p可嵌入l_F。

B l_f可嵌入$l_F\Leftrightarrow f$等价于$C_{F,1}$中函数。

C 当F满足$\triangle_2$条件，$x^p\in C_F\Leftrightarrow x^p$等价于$C_{F,1}$某一函数$\Leftrightarrow l^p$可嵌入$l_F\Leftrightarrow p\in[\alpha_F, \beta_F]$。

D 当F满足$\triangle_2$条件，C_F中不含与F等价的函数，则$\{e_n\}_1^\infty$在等价意义下是l_F的唯一对称基。这里记号

$$C_{M,t}=\overline{\underset{0<s<t}{\mathrm{conv}}}\left\{\frac{M(su)}{M(s)}\right\}\text{（闭包按C－范数）},\quad C_M=\bigcap_{0\le t\le 1}C_{M,t},$$

$$d_M=\sup\left\{p;\ \sup_{0<x,\,t\le 1}\frac{M(tx)}{M(t)x^p}<\infty\right\},\quad \beta_M=\inf\left\{p;\ \inf_{0<x,\,t\le 1}\frac{M(tx)}{M(t)\ x^p}>0\right\}.$$

E　存在自反的l_F，有至少两个不等价的对称基．

F　若F不是等价于一个x^p的极小Orlicz函数，则l_F有不可数两两不等价的对称基．

定理F也可作这样的表述：不可数多个两两不等价的N函数可以生成互相等距同构的Orlicz序列空间。这一点尖锐地显示的序列空间同函数空间的质的差异，同时也反映了序列空间的某种内在复杂性。

以后，Кириев等[29]在F不满足$\triangle_2$的情况下证明了h_M也有类似上述的结果．

3　Orlicz空间几何学

近几年一大批几何问题得到完全地或部分地解决．

继[30]表达了空间严格凸条件之后，一致凸条件也已给出[31]．L_M^*一致凸的充分必要条件是M满足$\triangle_2$条件以及对任意的$c>0,\varepsilon>0$有$\delta>0$，只要$\max(|u|,|v|)\ge c$，$|u-v|\ge\varepsilon\max(|u|,|v|)$就有$M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$．介于严格凸与一致凸之间的$H$严格凸、中点局部一致凸、弱局部一致凸和局部一致凸条件也全部获得[32—33]．出人意料的是〔L_M^*，$\|\cdot\|_{(M)}$〕的局部一致凸与严格凸竟是等价的．一致凸与K一致凸也是等价的，

与凸性有密切关联的光滑性与可微性充分必要条件也已得到[34]，〔L_M^*，$\|\cdot\|_{(M)}$〕光滑（Gateaux可微）的充要条件是$M(u)\in\triangle_2$和$M'(u)$连续．L_M^*很光滑与强光滑（Frechet可微）等价．[34]还指出了Rao[35]关于同一问题论述中的错误．

[36]给出空间一致非$l_n^{(1)}$的判别准则，即$M\in\triangle_2$；存在θ，$0<\theta<1$和$\delta>0$，使当$\sum_{k=1}^{n}M(u_R)\ge\frac{n\delta}{\mathrm{mesG}}$时

$$\sum M(\frac{u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n}{n})\le\frac{\theta 2^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}M(u_R)$$

左方是对一切可能的符号排列求和．对于序列空间而言，l_M一致非$l_n^{(1)}\Leftrightarrow d_n<n$．这里表征数$d_n=\inf\{c>0;\ \sum_{k=1}^{\infty}M(\frac{x_k}{c})=\frac{1}{n}\ (x=(x_k)\in S(l_M))\}$．一致非方的条件有更简单的表述[37]．〔$L_M^*$，$\|\cdot\|_M$〕是无条件局部一致非方的．[38]指出$L_M^*$自反$\Leftrightarrow L_M^*B-$凸$\Leftrightarrow L_M^*$有等价的一致凸范数最近获知$L_M^*$一致非方$\Leftrightarrow$一致非$l_n^{(1)}$．

序列空间〔l_M，$\|\cdot\|_{(M)}$〕的装球问题取得进展[39]，即当$M(u)\bar{\in}\triangle_2$时装球临界值$\Lambda_M=\frac{1}{2}$，$M(u)\in\triangle_2$时$\Lambda_M=\frac{d_2}{2+d_2}$．由此推出$\Lambda_M<\frac{1}{2}$等价于$l_M$一致非方[40]．

L_M^*平坦的充分必要条件是$M(u)\bar{\in}\triangle_2$或$M(u)=c|u|$[41]．l_M平坦性，girth和自反性的关系也已澄清．

关于基．〔42〕指出L的任何一个由完全正交系构成的基必为任何E_M的基．[43]给出L_M〔0，1〕中函数关于Spline基（Z.Ciesieki引进的）的无条件表达式．

还要提到对于自反Orlicz空间的凸性模的一个很好的估计式[44]．记$F_M(\varepsilon)=\varepsilon^2\inf\{\frac{u^2M(v)}{M(uv)};\ 1\le u\le\frac{1}{\varepsilon},\ v>0\}$，存在与$L_M$等价的$L_N$，其凸性模$\delta_N(\varepsilon)\ge cF_M(\varepsilon)$．

由上述诸段可以看到，人们总是力图直接以$M(u)$的特性来刻划空间L_M^*的相应的某种宏

观特性．这种刻划被认为是最佳的．

4 由 φ－函数生成的广义 Orlicz 空间

φ 函数是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上非负，仅当 $u=0$ 时为零，偶，连续，非降，$\varphi(\infty)=\infty$ 的函数，不要求凸性．由 φ 函数生成的 Orlicz 空间 L_φ^* 已不再是 Banach 空间，而是按准范数

$$\|x\|_{(\varphi)} = \inf\{c>0:\ \int_\Omega \varphi(\frac{x(t)}{c})\mathrm{d}\mu \le c\}$$

形成的 Frechet 空间．$L^p\ (0<p<1)$ 即为此种空间特例．

L_φ^* 的若干基本问题，如局部有界、局部凸、非平凡线性连续泛函存在等条件已经获得．空间的结构研究也有所进展．如关于有界集之间的关系，Turpin [45] 证明了局部有界的 L_ϕ^* 中，依范数有界蕴涵有界．W．Fescher 和 U．Schöler [46] 在 $\phi(u)\in\triangle_2$ 的前提下，关于凸集，将前一结果推广到一般的 L_φ^*．M．Iwo babuda [47] 又进一步取消了 $\triangle_2$ 条件的限制．Turpin [48] 还研究了 L_φ^* 的交空间，给出交空间局部凸的条件．

Turpin [49] 讨论非局部凸 L_φ^* 之间的线性算子，证明了从 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\phi(u)}{u}=0$ 可推得不存在由 L_ϕ^* 到自身的非零紧线性算子．Kalton [50] 考察了从 L_φ^* 到拓扑线性空间的算子．

Kalton [51] 同时也研究由 φ－函数生成的 Orlicz 序列空间，讨论了子空间、补子空间、基的唯一性和包含映射奇异性等问题．1982 年 L．Drewnowski 和 M．Nawrocki [52] 还研究了 l_φ 中的 Mackey 拓扑，证明了子空间 $h_\varphi=\{x\in l_\varphi:\ \forall r>0,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(r|x_i|)<\infty\}$ 中 Mackey 拓扑与原准范数拓扑重合．此外又建立了泛函 $\rho_\varphi(x)=\inf\{r>0:\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(\frac{|x_i|}{r})<\infty\}$ 关于 $\|\cdot\|_{(\varphi)}$ 连续的条件以及交 $l_\varphi\cap l_\psi$ 在 l_ψ 中稠的条件．

5　带参数的多元 N 函数生成的矢值函数 Orlicz 空间

1969 年 M．S．Skaff [53, 54] 引进定义于 $T\times R^n$ 上带参数的多元 N 函数 $M(t, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 以及由它生成的矢值函数 $x(t)=(x_i(t))_{i=1}^n$ 的 Orlicz 空间 L_M^*．这里 $M(t,u)$ 对于任何 $u\in R^n$ 关于 t 可测，对任何 $t\in T$ 是 u 的 N 函数；另外还满足某种单调性，因此时单调性已不是凸性的自然推论．

1976 年 M．J．Chatelain [55] 以及他与 A．Fougeres [56] 又把广义 N 函数减弱为广义 Young 函数，即以条件 $\lim\limits_{|u|\to\infty}M(t,u)=\infty$ 代替 $\lim\limits_{|u|\to\infty}\frac{M(t,u)}{|u|}=\infty$，考察了 Orlicz 类线性性、模收敛与范数收敛一致等基本问题．近年 Fennichh Rachida [57] 得到空间严格凸等价于杨函数的严格凸和球面上每点均为最大能量点，后一说法又相当于经过修正的 $\triangle_2$ 条件．Рутицкая [58] 得到模可微，模有界的条件．A．Kaminska 和 H．Hudzik 等 [59－61] 还讨论了作用在此类空间之间的线性算子以及推广的 Riesz—Thorin 插值定理．

Betounes, David E．[62] 考虑 $M(t,u)$，对任何 $t\in T$ 关于 u 是凹函数，以及由其产生的 Orlicz 空间．给出对偶空间和局部凸条件．

6　抽象函数的 Orlicz 空间

(T, Q, μ) 是测度空间，X 是 Banach 空间，函数 $\varphi(t,x)$：$T\times X\to[0,\infty)$ 对于每个 $x\in X$，关于 t 可测，对于每个 $t\in T$，关于 x 下半连续、偶、凸且有 $\varphi(t, 0)=0$．定义于 T 取值于 X 的抽象函数 $x(t)$ 按自然方式组成 Orlicz 空间．A．Kaminska，H．Hudzik [63] 指出，若 φ 满足 $\triangle_2$ 型条件，则按范数收敛等价于按模收敛．B．G．Fernando [64] 讨论了对偶空间和弱序列紧条件：件：$R\subset L^\varphi(X)$，R 相对于拓扑 $\sigma(L^\varphi(X), L^\psi(X^*))$ 序列紧的充分必要条件是 (i) R 依范数有

界；（ii）$R(A)=\{\int_A f d\mu:\ f\in R\}$ 对每一个$A\in Q$，在X中相对弱紧，（iii）$\lim\limits_{\mu(A)\to 0}\sup\{\int_A\langle f,g\rangle d\mu:\ f\in R\}=0$关于$g\in L^\varphi(X^*)$一致成立．H.Hudzik给出严格凸条件[65]．

Turpin[65]取消对φ的凸性要求，赋空间L^φ以自然的局部凸拓扑，得到级数收敛定理：若Σf_n完全收敛，则对一切有界实数列$\{c_n\}_1^\infty$均使$\Sigma c_n f_n$收敛．Francisco[67]在φ无参数情形讨论了非平凡线性连续泛函的存在．

A.Kaminska[68－70]还考虑称之为Orlicz－Musielak的序列空间．$\{\varphi_n\}_1^\infty$是定义X上的一列Young函数，按自然方式定义$l_\varphi(X)$和$h_\varphi(X)$．她得到：$h_\varphi(X)$可分⇔X可分．$l_\varphi(X)$关于两个范数的凸性和平坦性条件也已找到．

另外一个方向是Diestel[71－73]运用Bogdanowicz的Lebesgue－Bochner积分理论，在不同的框架之下引入抽象函数Orilcz空间．随后Zander[74]又给出了Fubini型定理．

7　Orlicz空间的其它推广

（1）Kulikov早在六十年代就研究了[75－76]带有混合范数的Orlicz空间．记$M_i(u)$为N函数（$i=1,2,\cdots,n$）

$$L^*_{M_1M_2\cdots M_n}=\{x(t):\exists c>0,\ 使$$

$$\int_{X_n}M_n(\int_{X_{n-1}}M_{n-1}(\cdots(\int_{X_2}M_2(\int_{X_1}M[cx(t_1,t_2,\cdots,t_n)]\,dt_1)dt_2\cdots)\,dt_{n-1})dt_n<\infty\}$$

令

$$\|x\|_{M_1M_2\cdots M_n}=\|\cdots\|\,\|x(t_1,t_2,\cdots,t_n)\|_{M_1}\|_{M_2}\cdots\|_{M_n}.$$

B.Firlej等[77]对两个此类空间的包含以及此类空间同通常Orlicz空间的包含作了研究．

（2）A.Kaminska与L.Drewnowski[78、79]讨论由一族测度产生的抽象函数Orlicz空间．仍考虑$\varphi(t,x)$是从测度空间T与Banach空间X到$[0,\infty)$的映射．代替通常的模$\rho_\varphi(f)=\int_T\varphi(t,f(t))d\mu$以

$$I_\varphi(f)=\sup\{\int\varphi(t,f(t))d\mu;\ \mu\in M\}$$

这里M是一族σ—可加正测度．研究了E_φ中列紧集条件，元列的收敛性和此种空间的应用．

（3）Francisco等[80]讨论加权Orlicz序列空间．$\varphi(x)$是Orlicz函数，$\{a_n\}_1^\infty$是一列正实数，

$$l^\varphi(a)=\{x=(x_n)_1^\infty:\ \exists s>0,\ \lambda_{\varphi,a}(x;s)=\sum_1^\infty a_n\varphi(\frac{|x_n|}{s})<\infty\}$$

在准范数

$$\|x\|=\inf\{s>0:\ \lambda_{\varphi,a}(x;s)\leqslant s\}$$

之下是Frechet空间．断定$l^\varphi(a)$在如下三种情况之一时是非局部凸的．

（i）φ无界，$\lim\limits_{x,y\to\infty}\dfrac{\varphi(xy)}{x\varphi(y)}=0$，$\underline{\lim}_n a_n=0$；

（ii）φ有界，$\lim a_n=0$，$\sum a_n=\infty$；

（iii）$\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{\varphi(xy)}{x\varphi(y)}=\infty$，$\overline{\lim}_n a_n=\infty$

以后Fuentes[81]研究了$l^\varphi(a)$包含同构于l^∞子空间的条件（对ϕ加上凸性限制）．早些时候，Heinig等[82]讨论了加权Orlicz函数空间，推广了L^p中成立的Marcinkiewicz插值定理．

参 考 文 献

〔1〕Красносельский М. А. Рутицкий Я. Б.,凸函数与Orlicz空间（吴从炘译），科学出版社，北京，1962.

〔2〕吴从炘，王廷辅，Orlicz空间及其应用，黑龙江科技出版社，哈尔滨，1983.

〔3〕Ando, T., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 8(1960), 413—418.

〔4〕Салехов Д. В., *Мат Заметки* 4(1968), 281—290.

〔5〕任重道，湘潭大学学报，(1980) no. 1, 54—62

〔6〕Zaanen, A.C., *Lect. Notes Math.*, 955(1982), 263—268

〔7〕Luxemburg, W.A.J., *Comment Math. Spec. Issue Ladislai Orlicz* 1(1978), 211—220.

〔8〕Orlicz, W., *Bull. Internat. Acad. Polon.* (1936), 93—107.

〔9〕Maleev, P. Rumen, Serdica 1(1975), 178—182.

〔10〕Dankert, G., Konig, H., *Arch. Math.* (*Basel*) 18(1967), 61—75.

〔10〕Dankert, G., *ibid.* 19(1968), 635—645.

〔12〕Dankert, G., *ibid.*, 25(1974), 52—68.

〔13〕O'Neil Rechard, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 115(1965), 300—328.

〔14〕Sharpley, R., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59(1976) 99—106.

〔15〕Milman, M., *ibid.*, 83(1981), 743—746

〔16〕任重道，自然杂志 6(1983), 238—239

〔17〕Class, W.J., Zaanen, A.C., *Comment Math. Spec. Issue Ladislai Orlicz* 1(1978), 77—93

〔18〕Kranz, P., Wnuk, W., *Proc. Kon-ned. Akad. Wetensch*, A 84(1981), 375—383.

〔19〕Грибанов Ю. И., *ИВУЗ Мат*, (1958) no. 4, 41—53.

〔20〕Грибанов, Ю., И, *Wiss. Z. Homboldt-Univ. Math.*, 8(1958/59), 339—349

〔21〕Грибанов Ю. И., *ИВУЗ Мат*, (1960) no. 2, 57—64

〔22〕王廷辅，黑龙江工学院科研论文集，(1965), no 2, 91—105

〔23〕Натайник А. Ф., *Приб. Мет. Анал. Киев.*, (1979), 93—102.

〔24〕Lindberg, K., *Studia Math.*, 45(1973), 119—146

〔25〕Luxembury, W.A.J., *ibid.*, 31(1968), 273—285.

〔26〕Lindenstrass, J., Tzafriri, L., *Israel J. Math.*, 10(1971), 379—390.

〔27〕Lindenstrass, J., Tzafriri, L., *ibid.*, 11(1972), 355—379.

〔28〕Lindenstrass, J., Tzafriri, L., *ibid.*, 14(1973), 368—389.

〔29〕Кирчев К. Л., Троянский С. Л., *Serdica* 1(1975), 88—95.

〔30〕吴从炘，陈俊澳，赵善中，哈工大学报（1978), no. 3, 1—12.

〔31〕王廷辅，哈科大学报，(1983), no. 2.

〔32〕陈述涛，哈师大学报（1983), no. 2, 48—56.

〔33〕陈述涛，王玉文 *ibid.*, (1983), no. 2, 41—47.

〔34〕王廷辅，陈述涛，Orlicz空间的光滑性及可微性（待发表）

〔35〕Rao, M.M., *J. Math. Ana. Appl.*, 37(1972), 228—234.

〔36〕王廷辅，Orlicz空间的一致非$l_n^{(1)}$性（科学探索待发表）.

〔37〕陈述涛，Orlicz空间的一致非方性（数学年刊待发表）

〔38〕Danker, M., Kombrink, R., *Lect. Notes Math.*, 709(1979), 87—95.

〔39〕叶以宁，数学年刊 4 A(1983), 487—493.

〔40〕叶以宁、李岩红，l_M的装球临界值与一致非方性（数学研究与评论待发表）

〔41〕Pach, A.J., Smith, M.A., Turett, B., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(1981), 528—530.

〔42〕Emeljanov, V.F., Emeljanova, L.M., Studia in differential equations and the theory of functions pp. 3—14, Izdat Saratov Univ., Saratov, 1973.

〔43〕Tkebucava, G.E., *Ana. Math.*, 7(1981), 69—80.

〔44〕 Maleev, R.P., Troyanski, S.L., *Studia Math.*, 54(1975), 131—141.
〔45〕 Turpin, P., *ibid.*, 56(1976), 69—71.
〔46〕 Fischer, W., Schöler, U., *ibid.*, 59(1976), 53—61.
〔47〕 Iwo Labuda, M., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 281 (1975), A 443—445
〔48〕 Turpin, P., *Studia Math.*, 46(1973), 167—195.
〔49〕 Turpin, P., *ibid.*, 46(1973), 153—165.
〔50〕 Kalton, N.J., *Israel J. Math.*, 26(1977), 126—136.
〔51〕 Kalton, N.J., *Math. Proc. Cambridge Philoc. Soc.* 81(1977), 253—277.
〔52〕 Drewnowski, L., Nawrocki, M. *Arch. Math.*, 39(1982), 59—68.
〔53〕 Skaff, M.S., *Pacific J. Math.*, 28(1969), 193—206.
〔54〕 Skaff, M.S., *ibid.*, 28(1969), 413—430.
〔55〕 Chatelain, M.J., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 283 (1976), A763—766.
〔56〕 Chatelain, M.J., Fougers, A., *ibid.*, 284 (1977), A 37—40.
〔57〕 Fennich, Rachida, *Travaux Sem Ana. Convexe* 10(1980), no. 1 exp. no. 9, 33pp.
〔58〕 Рутицкая А. Я., Воронеж тех. ин-т, Воронеж, 1982, 11
〔59〕 Kaminska, A., *Funct. Approx. Comment Math.* 4(1976), 135—139.
〔60〕 Hudzik, H., Musielak, J., Urbanski, R., *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 678—71 715(1980), 145—158(1981).
〔61〕 Hudzik, H., Musielak, J., Urbanski, R., *Rocz. Pol. Tow. Mat.*, 1(1980), 43—61.
〔62〕 Betounes, D.E., *Arch. Math.* (Basel) 37(1981), 256—266.
〔63〕 Kaminska, A., Huzik, H., *Comment Math. Prace Mat.*, 21(1980) 81—88.
〔64〕 Fernando, B.G., *Collet. Math.*, 32(1981), 3—12.
〔65〕 Hudzik, H., *Bull. Acad. Polon. Sci.* 29(1981), 235—247.
〔67〕 Turpin, P., Centre de Math. Ecole polytech., Paris, 1974.
〔67〕 Hernandez Fracisco L., *Rev. Real Acad. Cienc. Exat. Fis. Natur. Madrid* 76(1982), 101—114.
〔68〕 Kaminska, A., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 29(1981), 137—144.
〔69〕 Kaminska, A., *ibid.*, 30(1982), 347—352.
〔70〕 Kaminska, A., *J. Funct. Ann.* 50(1983), 285—305.
〔71〕 Diestel, J., *Math. Ann.* 186 (1970), 20—23.
〔72〕 Diestel, J., *Proc. Japan Acad.*, 46(1970), 109—112.
〔73〕 Diestel, J., *ibid.*, 46(1970), 508—510.
〔74〕 Zander, V., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32(1972), 102—110.
〔75〕 Kulikov, V.A., *Izdat. Kazan Univ., Kazan Math.*, (1966), 13—33.
〔76〕 Kulikov, V.A., *ibid.*, (1967), 18—25.
〔77〕 Firlej, B., Matuszewska, W., *Comment. Math. Prace Mat.* 17(1973/74), 347—357.
〔78〕 Kaminska, A., *ibid.*, 22(1980/81), 245—255.
〔79〕 Drewnowski, L., Kaminska, A., *ibid.*, 22(1980/81), 175—186.
〔80〕 Hernandez, Francisco L., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 29(1981), 579—584.
〔81〕 Fuentes, F., *Rev. Real Acad. cienc. exat. fis. Natur. Madrid*, 76(1982), 675—681
〔82〕 Heinig, H.P., Vanghan, D., *J. Math. Ann. Appl.* 64(1978), 79—95.