Liénard方程至多有一个极限环的二个充分条件*

陈秀东

（大连工学院应用数学研究所）

对Liénard方程

$$\dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = -g(x) \tag{*}$$

作相应的假设，作Филиппов变换[1,2]，得到$F_1(z)$，$F_2(z)$．再设$F_1(z) = -F_2(z)$，$F_1'(0) < 0$，$F_1''(z)$ 连续．记$F(z) = F_1(z)$，得到方程

$$\frac{dz}{dy} = F(z) - y . \tag{1}$$

记$m = \min\limits_{[0, z_0]} F(z)$，$M = \max\limits_{[0, z_0]} F(z)$，用求文〔3〕中状态函数$\Phi_3(z_0)$ 的方法，得到如下二个定理：

定理 1　设存在数 $0 < \Delta < z_0$，满足

1）$F'(z) \leqslant 0$，$0 \leqslant z \leqslant \Delta$；$F'(z) \geqslant 0$，$\Delta \leqslant z \leqslant z_0$；

2）$F(z) - M + \sqrt{(M - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} \geqslant 0$；$m + \sqrt{(m - F(z_0)^2 + 2(z_0 - z)} - F(z) \geqslant 0$，$\Delta \leqslant z \leqslant z_0$；

3）$$\int_0^{\Delta} F'(z) \frac{1}{(z) - m + \sqrt{(m - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)}} + \frac{1}{M + \sqrt{(M - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} - F(z)} \Big] dz + \int_{\Delta}^{z_0} F'(z) \Big[\frac{1}{F(z) - M + \sqrt{(M - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)}} + \frac{1}{m + \sqrt{(m - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} - F(z)} \Big] dz < 0,$$

则方程（*）至多有一个不与直线$z = z_0$相交的极限环．

定理 2　设存在数 $0 < \delta_1 < \Delta < \delta_2 \leqslant z_0$，满足

1）$F'(z) \leqslant 0, z\ [0, \delta_1] \cup [\delta_2, z_0]$；$F'(z) \geqslant 0, z\ [\delta_1, \delta_2]$；$F''(z) \geqslant 0, z\ [0, \Delta]$；$F''(z) \leqslant 0$，$z\ [\Delta, z_0]$；

2）$$F'(0)(F(\delta_2) - F(\delta_1)) + \int_0^{\Delta} F''(z) \Big[\sqrt{(M - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} - + \sqrt{(m - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} + (M - m) \Big] dz + \int_{\Delta}^{z_0} F''(z) \Big[\sqrt{(M - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} + + \sqrt{(m - F(z_0))^2 + 2(z_0 - z)} - (M - m) \Big] dz < 0,$$

则方程（*）至多有一个不与直线$z = z_0$相交的极限环．

参　考　文　献

〔1〕叶彦谦等,《极限环论》，上海科技出版社，1984年．

〔2〕张芷芬等,《微分方程定性理论》，科学出版社，1985．

〔3〕陈秀东、状态函数零点与极限环(英文)，微分方程年刊（英文版），Vol. 1，No. 2，1985．

* 1986年5月30日收到．