关于"体上矩阵的广义逆"一文的注*

屠伯壎

（复旦大学）

"体上矩阵的广义逆"一文[1]讨论了带有对合反自构的这种"任意"体上矩阵的（强）广义逆（即Moore－Penrose逆）．我们在下面将指出，这种体不可能是别的而只能是p除环．所谓p－除环[2]，指的是：带有对合反自同构σ，且满足"正性条件"的环Ω，即对Ω中任意 s个非零元$a_1, a_2, \cdots, a_s$，恒有：$\sum_{i=1}^{s} a_i \cdot a_i^{\sigma} \neq 0$．

我们可容易地证明下述结论：

定理 带有对合反自同构σ的体Ω上任意阵有（强）广义逆的充要条件是，Ω是p－除环．

证 如Ω是p－除环，则在〔2〕中我们已证：Ω上任意矩阵恒有（强）广义逆．反之，若带有对合反自同构σ的体Ω上的任意阵A有（强）广义逆，则

$$r(\Delta) = r(\mathbf{A}(\mathbf{A}')^{\sigma}), \tag{1}$$

（这是十分明显的）此外$r(\mathbf{M})$表示M的秩，而对$\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$．记$\mathbf{B}^{\sigma} = (b_{ij}^{\sigma})_{m\times n}$．故对$\Omega$中任意 s个非零元$a_1, a_2, \cdots, a_s$，若$\sum_{i=1}^{s} a_i \cdot a_i^{\sigma} = 0$，即

$$(a_1, a_2, \cdots a_s)\begin{pmatrix} a_1^{\sigma} \\ a_2^{\sigma} \\ \vdots \\ a_s^{\sigma} \end{pmatrix} = 0$$

则由（1）式可知，$r((a_1, a_2, \cdots, a_s)) = 0$，从而$a_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, s$．此为矛盾，故$\sum_{i=1}^{s} a_i \cdot a_i^{\sigma} \neq 0$，即$\Omega$是p－除环．证毕．

另外，对p－除环Ω上任意$m\times n$阵A，我们可完全模仿复数域上矩阵的奇异值分解的证法（例如，见〔3〕），而得到A在Ω上的奇异值分解：

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{V}')^{\sigma}, \mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r\}, \tag{2}$$

其中$\omega_i \neq 0$：$i = 1, 2, \cdots, r$，而U与V是Ω上两阵，从而 A的（强）广义逆为：

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{U}')^{\sigma}, \tag{3}$$

我们也可以由（2）与（3）式求A的（强）广义逆$\mathbf{A}^{+}$．

参考文献

〔1〕庄瓦金，体上矩阵的广义逆，数学杂志，6：1（1986），105～112．

〔2〕屠伯壎，p－除环上矩阵的广义逆，数学学报，20：2（1986），246～248．

〔3〕屠伯壎，线性代数方法导引，复旦大学出版社，1986．

*1986年6月25日收到．