集值非自映射的某些不动点定理*

丁协平

（四川师范学院数学系）

Assad; Kirk〔1〕, Assad〔2〕, Khan〔3〕和Rhoades〔4〕研究了距离空间内集值和点值非自映射的不动点问题．显然对非自映射的研究是有意义的．

本文目的是在更一般的条件下研究集值非自映射不动点的存在性和推广〔1—4〕的主要结果．

设（X, d）是距离空间，CB(X）表X的一切非空有界闭子集的族．C(X）表X的一切非空紧子集的族．$D(x, A)=\inf\{d(x, y): y\in A\}$, $x\in X$, $A\subset X$．$H(\cdot, \cdot)$表d在CB(X）上的诱导的Hausdorff距离．

定义1　称距离空间（X, d）是距离凸的，如果对一切$x, y\in X$, $x\neq y$，存在$z\in X$, $x\neq z\neq y$使得$d(x, z)+d(z, y)=d(x, y)$．

引理1（〔1〕）设K是完备距离凸距离空间(X, d)的非空闭子集，则对任意$x\in K$, $y\notin K$存在$z\in\partial K$（∂K表K的边界）使得$d(x, z)+d(z, y)=d(x, y)$．

引理2　设A, $B\in CB(X)$，则对每一$\alpha>1$和$a\in A$存在$b\in B$使得$d(a, b)\leq\alpha H(A, B)$．

定理1　设K是完备距离凸距离空间（X, d）的非空闭子集．$S, T: K\to CB(X)$满足：$Sx, Tx\subset K$, $\forall x\in\partial K$．如果存在$h\in(0, 1)$, $q>\max\{\frac{h(1+h)}{1-h}, 1+h\}$使得

$$H(Sx, Ty)\leq h\max\{d(x, y), \frac{1}{q}[D(x, Sx)+D(y, Ty)], \frac{1}{q}[D(x, Ty)+D(y, Sx)]\}, \quad \forall x, y\in K \tag{1}$$

则S和T在K内有一公共不动点．

证明　因$\frac{h(1+h)}{1-h}$和$1+h$在$(0, 1)$上增加，连续，故存在常数$a\in(1, \frac{1}{h})$使得

$$q>\max\{\frac{ah(1+ah)}{1-ah}, 1+ah\}>\max\{\frac{h(1+h)}{1-h}, 1+h\} \tag{2}$$

从而有　$ah<1$和$\frac{q+ah}{q-ah}\cdot ah<1$．

令$x_0\in\partial K$, $x_1=y_1\in Sx_0$，由引理2存在$y_2\in Tx_1$使得$d(y_1, y_2)\leq aH(Sx_0, Tx_1)$．若

* 1982年7月15日收到．

$y_2\in K$，则令$x_2=y_2$；若$y_2\notin K$，则由引理1存在$x_2\in\partial K$使得$d(x_1, x_2)+d(x_2, y_2)y_2=d(x_1, y_2)$．继续此方法我们可定义序列$\{x_n\}\subset K$，$\{y_n\}\subset X$满足：

(i) $y_n\in Sx_{n-1}$，若n为奇数；$y_n\in Tx_{n-1}$，若n为偶数；

(ii) $d(y_n, y_{n+1})\leq\begin{cases}aH(Sx_{n-1}, Tx_n), & n\text{为奇数},\\ aH(Tx_{n-1}, Sx_n), & n\text{为偶数};\end{cases}$

(iii) 对一切n若$y_{n+1}\in K$，则$x_{n+1}=y_{n+1}$，若$y_{n+1}\notin K$，则$x_{n+1}\in\partial K$和$d(x_n, x_{n+1})+d(x_{n+1}, y_{n+1})=d(x_n, y_{n+1})$．

令$P=\{x_i\in\{x_n\}\mid x_i=y_i\}$，$Q=\{x_i\in\{x_n\}\mid x_i\neq y_i\}$．如果$x_n\in Q$，则由边界条件有$x_{n-1}$，$x_{n+1}\in P$．

下面分三种情形估计$d(x_n, x_{n+1})$：

情形Ⅰ　令x_n，$x_{n+1}\in P$．　当n为奇数时有

$d(x_n, x_{n+1})=d(y_n, y_{n+1})\leq aH(Sx_{n-1}, Tx_n)\leq ah\max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{q}[d(x_{n-1}x_n)+d(x_n, x_{n+1})], \frac{1}{q}[d(x_{n-1}, x_n)+d(x_n, x_{n+1})+0]\}$.

由（2）式有$q>1+ah$，即$\frac{ah}{q-ah}<ah$，故由上式推得

$$d(x_n, x_{n+1})\leq ahd(x_{n-1}, x_n)\tag{3}$$

当n为奇数时，同样可推得（3）式．

情形Ⅱ　令$x_n\in P$，$x_{n+1}\in Q$，由条件（iii）有$d(x_n, x_{n+1})\leq d(x_n, y_{n+1})=d(y_n, y_{n+1})$，由情形1推得（3）式成立．

情形Ⅲ　令$x_n\in Q$，$x_{n+1}\in P$．此时有$x_{n-1}=y_{n-1}$．当n为奇数时，注意到$d(x_{n-1}, x_n)+d(x_n, y_n)=d(x_{n-1}, y_n)$，有$d(x_n, x_{n+1})\leq d(x_n, y_n)+d(y_n, y_{n+1})\leq d(x_n, y_n)+aH(Sx_{n-1}, Tx_n)\leq\max\{d(x_n, y_n)+ahd(x_{n-1}, x_n), d(x_n, y_n)+\frac{ah}{q}[d(x_{n-1}, y_n)+d(x_n, Tx_n)], d(x_n, y_n)+\frac{ah}{q}[d(x_{n-1}, x_{n-1})+d(x_n, y_n)]\}\leq\max\{d(x_{n-1}, y_n), \frac{q+ah}{q}d(x_{r-1}, y_n), \frac{ah}{q}d(x_n, x_{n+1})\}$ 于是从上式推得$d(x_n, x_{n+1}$

于是从上式推得$d(x_n, x_{n+1})\leq\frac{q+ah}{q-ah}d(x_{n-1}, y_n)=\frac{q+ah}{q-ah}d(y_{n-1}, y_n)$．由情形Ⅱ得到$d(x_n, x_{n+1})\frac{q+ah}{q-ah}ahd(x_{n-2}, x_{n-1})$．结合情形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，可得到$d(x_n, x_{n+1})\leq h_1\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n-2}, x_{n-1})\}$，其中$h_1=\frac{q+ah}{q-ah}\cdot ah<1$．于是对一切$n\geq 1$有$d(x_n, x_{n+1})\leq h_1^{[\frac{n}{2}]}\delta$，其中$\delta=\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}$．从而对充分大的$N$，当$m>n>N$时有

$$d(x_n, x_m)\leq\sum_{i=N}^{\infty}d(x_i, x_{i+1})<\delta\cdot\sum_{i=N}^{\infty}h_1^{[\frac{i}{2}]}.$$

因此 $\{x_n\}$ 是一Cauch序列. 令 $x_n \to Z \in K$. 由 $\{x_n\}$ 的定义无妨设存在 $\{x_n\}$ 的一限子序列 $\{x_{n_i}\} \subset$ P 且各 n_i 均为偶数. 于是有

$$D(x_{n_i}, Sz) \leq H(Tx_{n_i-1}, Sz) \leq h\max\{d(z, x_{n_i-1}), \frac{1}{q}[d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + D(z, Sz)],$$
$$\frac{1}{q}[d(z, x_{n_i}) + d(x_{n_i-1}, z) + D(z, Sz)]\}$$

在上式中令 $i \to \infty$ 得到 $D(z, Sz) \leq \frac{h}{q} D(z, Sz)$. 因为 $q < h$. 故 $D(z, Sz) = 0$. 又因 Sz 为闭集, 故得 $z \in Sz$. 再由 (1) 式容易证得 $z \in Tz$. 因此 z 是 S 和 T 在K内的一公共不动点. 证毕.

定理2 设K是完备距离凸距离空间 (X, d) 的非空闭子集, S, T: K→C(X) 满足对每一 $x \in \partial$K, Sx, $Tx \subset$ K. 如果存在 $h \in (0, 1)$ 和 $q \geq \max\left\{\frac{h(1+h)}{1-h}, 1+h\right\}$ 使得对一切 x, $y \in$ K 有 (1) 式成立, 则 T 和 S 在K内有一公共不动点.

证明 如在定理1内证明一样可定义序列 $\{x_n\} \subset$ K, $\{y_n\} \subset$ X满足条件 (i) (iii), 条件 (ii)由下面条件代替

(ii)′ $d(y_n, y_{n+1}) \leq H(Sx_{n-1}, Tx_n)$, n 为奇数;

$d(y_n, y_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Sx_n)$, n 为偶数.

其余证明与定理1相同.

系1 设K是Banach空间X的非空闭子集, S, T: K→X满足 Sx, $Tx \in$ K, $\forall x \in \partial$K, 如果存在 $h \in (0, 1)$ 和 $q \geq \max\left\{\frac{h(1+h)}{1-h}, 1+h\right\}$ 使得对一切 x, $y \in$ K

$$\|Sx - Ty\| \leq h\max\{\|x-y\|, \frac{1}{q}[\|x - Sx\| + \|y - Ty\|], \frac{1}{q}[\|x - Ty\| + \|y - Sx\|]\},$$

则 S 和 T 在K内有唯一公共不动点.

注1 定理1, 2和系1推广了[1]和[3]中某些主要结果.

定理3 设K是Banach空间 X 的非空闭子集, T: K→CB(X) 满足 $Tx \subset$ K, $\forall x \in \partial$K. 如果存在 $h \in (0, 1)$ 和 $q > 1 + 2h$ 使得对一切 x, $y \in$ K

$$H(Tx, Ty) \leq h\max\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|, D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{q}[D(x, Ty) + D(y, Tx)]\right\} \tag{4}$$

则 T 在 K 内有一不动点.

证明 因 $1 + 2h$ 是 (0, 1) 上的增加连续函数, 故存在 $a \in (1, \frac{1}{h})$ 使得 $q > 1 + 2ah$. 令 $x_0 \in \partial$K, $x_1 = y_1 \in Tx_0$, 由引理2知存在 $y_2 \in Tx_1$ 使得 $d(y_1, y_2) \leq aH(Tx_0, Tx_1)$. 若 $y_2 \in$ K, 则令 $x_2 = y_2$; 若 $y_2 \notin$ K, 则存在 $x_2 \in \partial$K使得 $\|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y_2\| = \|x_1 - y_2\|$. 继续此方法可定义序列 $\{x_n\} \subset$ K和 $\{y_n\} \subset$ X使得

(i) $y_n \in Tx_{n-1}$; $\|y_n - y_{n+1}\| \leq aH(Tx_{n-1}, Tx_n)$,

(ii) 若 $y_n \in$ K, 则 $y_n = x_n$; 若 $y_n \notin$ K, 则有 $x_n \in \partial$K使得 $\|x_{n-1} - x_n\| + \|x_n - y_n\| = \|x_{n-1} - y_n\|$.

令 $P = \{x_i \in \{x_n\} | x_i = y_i\}$, $Q = \{x_i \in \{x_n\} | x_i \neq y_i\}$. 若 $x_n \in$ Q, 则有 x_{n-1}, $x_{n+1} \in$ P. 下面估计 $d(x_n, x_{n-1})$:

情形Ⅰ　令x_n，$x_{n+1}\in P$，则由（4）式有$\|x_n-x_{n+1}\|=\|y_n-y_{n+1}\|\leq aH(Tx_{n-1},Tx_n)$
$\leq ah\max\{\frac{1}{2}\|x_{n-1}-x_n\|,\ \|x_{n-1}-x_n\|,\ \|x_n-x_{n+1}\|,\ \frac{1}{q}[\|x_{n-1}-x_n\|+\|x_n-x_{n+1}\|+0]\}$.
因$q>1+2ah$，故$\frac{ah}{q-ah}<ah$，从而由上式推得

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leq ah\|x_{n-1}-x_n\| \tag{5}$$

情形Ⅱ　令$x_n\in P$，$x_{n+1}\in Q$．注意到条件（ii）有$\|x_n-x_{n+1}\|\leq\|x_n-y_{n+1}\|=\|y_n-y_{n+1}\|$．由情形Ⅰ知（5）式成立．

情形Ⅲ　令$x_n\in Q$，$x_{n+1}\in P$，此时我们有$x_{n-1}\in P$和$\|x_n-x_{n+1}\|\leq\max\{\|x_{n-1}-x_{n+1}\|,\ \|y_n-x_{n+1}\|\}$

若$\|x_n-x_{n+1}\|\leq\|y_n-x_{n+1}\|=\|y_n-y_{n+1}\|$，则有$\|x_n-x_{n+1}\|\leq ahH(Tx_{n-1},Tx_n)$
$\leq ah\max\{\frac{1}{2}\|x_{n-1}-x_n\|,\ \|x_{n-1}-y_n\|,\ \|x_n-x_{n+1}\|,\ \frac{1}{q}[\|x_{n-1}-x_n\|+\|x_n-x_{n+1}\|+$
$\|x_n-y_n\|]\}\leq ah\max\{\|x_{n-1}-y_n\|,\ \frac{1}{q}[\|x_{n-1}-y_n\|+\|x_n-x_{n+1}\|]\}\leq ah\|x_{n-1}-y_n\|$.
由情形Ⅱ和上式推得$\|x_n-x_{n+1}\|\leq(ah)^2\|x_{n-2}-x_{n-1}\|$.

若$\|x_n-x_{n+1}\|\leq\|x_{n-1}-x_{n+1}\|=\|y_{n-1}-y_{n+1}\|\leq aH(Tx_{n-2},Tx_n)$，则
$\|x_n-x_{n+1}\|\leq ah\max\{\frac{1}{2}\|x_{n-2}-x_n\|,\ \|x_{n-2}-x_{n-1}\|,\ \|x_n-x_{n+1}\|,\ \frac{1}{q}[\|x_{n-2}-x_{n+1}\|+$
$\|x_n-x_{n-1}\|]\}\leq ah\max\{\|x_{n-2}-x_{n-1}\|,\ \|x_{n-1}-x_n\|,\ \frac{1}{q}[\|x_{n-2}-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}-x_{n+1}\|$
$\|x_n-x_{n-1}\|\}$

因为$\|x_{n-1}-x_n\|ah\|x_{n-2}-x_{n-1}\|$，如果上式右边最大值为$\frac{1}{q}[\|x_{n-2}-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}-x_{n+1}\|$
$+\|x_n-x_{n-1}\|]$，则有

$$\|x_{n-1}-x_{n+1}\|\leq\frac{ah}{p}(1+ah)\|x_{n-2}-x_{n-1}\|+\frac{an}{q}\|x_{n-1}-x_{s\ n+1}\|$$

由此推得

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leq\|x_{n-1}-x_{n+1}\|\leq\frac{1+ah}{q-ah}ah\|x_{n-2}-x_{n-1}\|\leq ah\|x_{n-2}-x_{n-1}\|.$$

因此对一切情形均有$\|x_n-x_{n+1}\|\leq ah\max\{\|x_n-x_{n-1}\|,\ \|x_{n-2}-x_{n-1}\|\}$仿定理1的证明可证得$\{x_n\}$是一Cauchy序列．令$x_n\to z\in K$．利用（4）式又仿定理1的证明可证得$z\in Tz$．即$z$是$T$在K内的一不动点．

定理4　设K是Banach空间X的非空闭子集，T：$K\to C(X)$满足$Tx\subset K$，$\forall x\in\partial K$．如果存在$h\in(0,1)$和$q\geq1+2h$使得对一切x，$y\in K$，（4）式成立，则T在K内有一不动点．

证明　如在定理3的证明中一样定义序列$\{x_n\}\subset K$，$\{y_n\}\subset X$满足条件（ii），条件（i）由下面条件代替：

（i）′　$y_n\in Tx_{n-1}$，$\|y_n-y_{n+1}\|\leq H(Tx_{n-1},Tx_n)$，其余证明与定理3相同．

注2　定理3，4是Rhoades〔4〕的主要结果推广到集值映射的情形．

这里我们顺便指出Khan〔3〕的定理3.4的证明即使当$S=T$时也是错误的．我们给出一个比〔3〕的定理3.4（$S=T$）更好的结果．

定理 5 设K是完备距离凸距离空间（X，d）的非空紧子集．T：K→CB(X）连续且满足$Tx\subset$ K，$\forall x\in\partial$K．如果存在α，β，$\gamma\geq 0$，$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(1+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)^2}\leq 1$，使得对一切$x$，$y\in$K，$x\neq y$有

$$H(Tx, Ty)<\alpha d(x, y)+\beta[D(x, Tx)+D(y, Ty)]+\gamma[D(y, Tx)+D(x, Ty)] \quad (6)$$

则T在K内有一不动点．

证明 因T连续，故$f(x)=D(x, Tx)$ $\forall x\in$K是K上的非负连续函数．又因K是紧集，故存在$z\in$K使得$f(z)=\inf\{f(x): x\in K\}$．若$f(z)=0$，则定理得证；设$f(z)>0$，则对每一$n$可选取$x_n\in Tz$使得$d(x_n, z)\leq f(z)+\frac{1}{n}$，$n=1, 2, \cdots$．如果存在$\{x_n\}$的一无限子序列$\{x_{n_i}\}\subset$K，则可令$x_{n_i}\to x_0\in$K且$x_0\in Tz$．从而有$d(x_0, z)\leq f(z)$，$z\neq x_0$．由（6）式有$f(x_0)=D(x_0, Tx_0)\leq H(Tz, Tx_0)<\alpha d(z, x_0)+\beta[f(z)+f(x_0)]+\gamma[0+d(z, x_0)+f(x_0)]\leq(\alpha+\beta+\gamma)f(z)+(\beta+\gamma)f(x_0)$．于是推得

$f(x_0)<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}f(z)\leq f(z)$，这与$z$的极小性矛盾，故$f(z)=0$．

若存在$\{x_n\}$的无限子序列$\{x_{n_i}\}$使得每一$x_{n_i}\notin$K，则$z\in\partial$K．无妨设一切$x_n\notin$K：由引理1存在$y_n\in\partial$K满足$d(z, y_n)+d(y_n, x_n)=d(z, x_n)$．由K的紧性，无妨设$y_n\to y_0\in\partial$K．于是$y_0\neq z$．令

$5\varepsilon=\alpha d(y_0, z)+\beta[D(y_0, Ty_0)+D(z, Tz)]+\gamma[D(y_0, Tz)+D(z, Ty_0)]-H(Ty_0, Tz)$．于是对选定的$\varepsilon$，存在$N>0$使得对一切$n>N$有

$$d(y_0, z)<d(y_n, z)+\varepsilon;\ d(x_n, z)<f(z)+\varepsilon;$$
$$H(Tz, Ty_n)<H(Tz, Ty_0)+\varepsilon;\ f(y_0)-\varepsilon<f(y_n)$$

从而有

$f(y_0)-\varepsilon<f(y_n)=D(y_n, Ty_n)\leq D(y_n, Tz)+H(Tz, Ty_n)<d(y_n, x_n)+H(Tz, Ty_0)+\varepsilon\leq d(y_n, x_n)+\alpha d(z, y_0)+\beta[f(z)+f(y_0)]+\gamma[D(z, Ty_0)+D(y_0, Tz)]-5\varepsilon+\varepsilon<d(y_n, x_n)+\alpha[d(y_n, z)+\varepsilon]+\beta[f(z)+f(y_0)]+\gamma[2d(y_n, z)+2\varepsilon+f(y_0)+f(z)]-4\varepsilon\leq d(y_n, x_n)+(\alpha+2\gamma)d(y_n, z)+(\beta+\gamma)[f(z)+f(y_0)]+(\alpha+2\gamma)\varepsilon-4\varepsilon<d(y_n, x_n)+d(y_n, z)+(\beta+\gamma)[f(z)+f(y_0)]-3\varepsilon=d(z, x_n)+(\beta+\gamma)[f(z)+f(y_0)]-3\varepsilon<(1+\beta+\gamma)f(z)+(\beta+\gamma)f(y_0)-2\varepsilon$．

于是有

$$f(y_0)<\frac{1+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}f(z)-\frac{\varepsilon}{1-\beta-\gamma} \quad (7)$$

因$y_0\in\partial$K，故$Ty_0\subset$K是紧集，从而存在$u\in Ty_0$使得$D(y_0, Ty_0)=d(y_0, u)$．因$f(z)>0$所以$y_0\neq u$．于是有

$f(u)=D(u, Tu)\leq H(Ty_0, Tu)<\alpha d(y_0, u)+\beta[f(y_0)+f(u)]+\gamma[D(y_0, Tu)+D(u, Ty_0)]\leq\alpha f(y_0)+\beta[f(y_0)+f(u)]+\gamma[f(y_0)+f(u)+0]$

由此推得$f(u)<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}f(y_0)$．结合（7）式得到

$$f(u) < \left(\frac{1+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}\right)\left(\frac{1+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}\right) f(z) - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}\varepsilon \leq f(z),$$

这又与 z 的极小性矛盾，故 $f(z)=0$. z 是 T 在K内的一不动点.

注 3 定理5推广了〔3〕的定理3.4（$S=T$），去掉了假设 $0<2\alpha+2\beta+\gamma<1$. 也推广了〔2〕,〔5〕的相应结果.

参 考 文 献

〔1〕Assad, N, A. & Kirk, W. A. , Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type, Pacific J.Math., 43(1972), 553—562

〔2〕Assad, N. A., Fixed point theorems for set-valued transformation on compact sets, Boll. Un. Mat. Ital. , 7(4)(1973) , 1—7 .

〔3〕Khan, M. S., Common fixed point theorems for multivalued mappings, Pacific J. Math. , 95(1981) , 337—347 .

〔4〕Rhoades, B.E. A fixed point theorem for some non- self-mappings, Math. Japonica, 23(4) (1978) , 457—459 .

〔5〕Itoh, S., Multivalued generalized contraction and fixed point theorems, Comm. Math. Vniv. Carolinae, 18(2)(1977) , 247—258