1986年10月

数学研究与评论
第六卷　第四期

关于一类映象的Ishikawa迭代程序的收敛性*

张石生　　　　傅俊义
（四川大学数学系）　（江西大学数学系）

一、引言

自1970年Dotson在〔10〕中引入拟非扩张映象的概念后，近几年不少人分别在引文〔1—10〕中讨论过某些特殊类型的拟非扩张映象的不动点的存在性及其Mann-Ishikawa 迭代程序的收敛问题.

本文的目的是讨论更广泛的一类拟非扩张映射族的公共不动点的存在性，以及其Ishikawa迭代程序向该类映象象族的公共不动点的强、弱收敛性. 本文的结果改进和推广了最近不少人的重要结果.

二、预备知识和引理

本文约定X表示Banach空间，$R^+=[0, +\infty)$，Z表示正整数集. $x_n\to x_0$，$x_n\xrightarrow{W}x_0$分别表示X中的点列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$强、弱收敛于x_0. 设D为X的非空子集映象S：D→D，$F(S)=\{x\in D\mid Sx=x\}$表示S的不动点集.

定义1　映象T：D→D被称为是拟非扩张的，如果$F(T)\neq\phi$，且$\forall x\in D$及$p\in F(T)$有$\|Tx-p\|\leq\|x-p\|$.

定义2　称X是满足Opial条件的，如果$x_n\xrightarrow{W}x_0$，则$\forall x\in X$，$x\neq x_0$，都有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-x_0\|<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-x\|$.

定义3　设$(T_i)_{i\in I}$（I为有限集或无限集）是映D到自身的映象族，如果$\forall x, y\in D, i, j\in I$有

（Ⅰ）$\|T_ix-T_jy\|\leq a\|x-y\|+b(\|x-T_ix\|+\|y-T_jy\|)+c(\|x-T_jy\|+\|y-T_ix\|)$，

（其中a，b，$c\geq0$，$a+2b+2c\leq$ 则称$(T_i)_{i\in I}$是平均非扩张映象族.

对于映象族$(T_i)_{i\in I}$，用$F(T)$表示其公共不动点集. 若$(T_i)_{i\in I}$是平均非扩张映射族，且$F(T)\neq\phi$，容易证明（见〔2〕），$p\in F(T)$及$x\in D$有

$$\|T_ix-p\|\leq\|x-p\|\quad(i\in I)\tag{1}$$

故$(T_i)_{i\in I}$是拟非扩张映象族.

引理1　设$(T_i)_{i\in I}$是D→D的映射族，$\forall x, y\in D$及$i, j\in I$满足

（Ⅱ）$\|T_ix-T_jy\|\leq\Phi(\|x-y\|, \|x-T_ix\|, \|y-T_jy\|, \|x-T_jy\|, \|y-T_ix\|)$，其中函数$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$满足下列条件$(\Phi_1)$：

(Φ_1)　Φ: $R^{+5}\to R^+$，对每个变量t_i（$1\leq i\leq5$）是不减的和上半连续的，而且对每个$t>0$及每一$a\in(1,2)$

$$\Phi(t, at, 0, t, t)<t.$$

若$F(T)\neq\phi$，则$(T_i)_{i\in I}$是D→D的拟非扩张映象族.

证　由条件（Ⅱ），$\forall x\in D$和$p\in F(T)$，有

$\|T_ix-p\|=\|T_ix-T_jp\|\leq\Phi(\|x-p\|, \|x-p\|+\|p-T_ix\|, 0, \|x-p\|, \|p-T_ix\|)$，

* 1983年2月17日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

若有 $\|T_i x-p\|>\|x-p\|$，于是存在 $a\in(1,\ 2)$ 使得

$$\|x-p\|+\|p-T_i x\|=a\|p-T_i x\|.$$

由上式和条件 (Φ_1)，有

$\|T_i x-p\|\le\Phi(\|T_i x-p\|,\ a\|T_i x-p\|,\ 0,\ \|T_i x-p\|,\ \|T_i x-p\|)<\|T_i x-p\|$，

矛盾．由此得知

$$\|T_i x-p\|\le\|x-p\|\quad(\forall x\in D,\ p\in F(T),i\in I)．$$ 证毕．

定义 4　设D是X的非空凸子集，$(T_i)_{i\in Z}$ 是映D到自身的映象族．$\forall x_1\in D$，令 $x_{n+1}=a_nT_ny_n+(1-a_n)x_n$．$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，其中 $y_n=\beta_nT_nx_n+(1-\beta_n)x_n$．$0\le a_n,\ \beta_n\le1$，$n=1,2,\cdots$．记 $M(x_1,\ a_n,\ \beta_n,\ T_n)=(x_n)_{n\in Z}$，称 $M(x_1,\ a_n,\ \beta_n,\ T_n)$ 为Ishikawa迭代序列．

引理 2　设D为X的非空凸子集，$(T_n)_{n\in Z}$ 是 $D\to D$ 的拟非扩张映象族，且 $F(T)\neq\phi$，$M(x_1,\ a_n,\beta_n,\ T_n)$ 是由定义4给出的Ishikawa迭代序列，则有

$$\|x_{n+1}-p\|\le\|x_n-p\|\quad(\forall p\in F(T),n=1,2,\cdots)\qquad(2)$$

证　因 $\forall x\in D,p\in F(T)$ 有 $\|T_nx-p\|\le\|x-p\|$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $\|x_{n+1}-p\|=\|a_nT_ny_n+(1-a_n)x_n-p\|\le a_n\|y_n-p\|+(1-a_n)\|x_n-p\|\le a_n\{\beta_n\|x_n-p\|+(1-\beta_n)\|x_n-p\|\}+(1-a_n)\|x_n-p\|=\|x_n-p\|$ $(n=1,2,\cdots)$．证毕．

引理 3（见〔9〕）　设X是一致凸的Banach空间，$\forall\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon\le2)$，$d>0$，$a\in(0,\ 1)$，若 $\|x\|\le d$，$\|y\|\le d$ 且 $\|x-y\|\ge\varepsilon$，则 $\|ax+(1-a)y\|\le[1-2\delta(\frac{\varepsilon}{d})\min(a,\ 1-a)]d$，其中 $\delta(\varepsilon)>0$ 为X的凸性模．

三、主要结果

定理 1　设X是自反的严格凸空间，D是X的非空有界闭凸集，而且有正规结构，$(T_i)_{i\in I}$ 是 $D\to D$ 的可交换平均非扩张映象族，则 $F(T)\neq\phi$．

证　由〔11〕知，$\forall i\in I,F(T_i)\neq\phi$．由〔1〕知 $F(T_i)$ 为D的闭凸子集．因X自反，故D是弱紧凸集．因每个 $F(T_i)$ 为D的闭弱子集，如能证明 $\{F(T_i)\}_{i\in I}$ 具有有限交性质，则 $F(T)=\bigcap\limits_{i\in I}F(T_i)\neq\phi$．

事实上，任取 $T_{i_1},T_{i_2}\in(T_i)_{i\in I}$，$x\in F(T_{i_2})$，则因 $T_{i_2}(T_{i_1}x)=T_{i_1}(T_{i_2}x)=T_{i_1}x$，故 $T_{i_1}x\in F(T_{i_2})$，即 $T_{i_1}:\ F(T_{i_2})\to F(T_{i_2})$，仍由〔11〕知有 $x_0\in F(T_{i_2})$ 使 $T_{i_1}x_0=x_0$．所以 $x_0\in F(T_{i_1})\cap F(T_{i_2})$．

设 $\bigcap\limits_{n=1}^{k-1}F(T_{i_n})\neq\phi$，任取 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{k-1}F(T_{i_n})$，则 $T_{i_n}(T_{i_k}x)=T_{i_k}(T_{i_n}x)=T_{i_k}x$ $(n=1,2,\cdots,k-1)$．从此，$T_{i_k}x\in\bigcap\limits_{n=1}^{k-1}F(T_{i_n})$，即 T_{i_k} 映 $\bigcap\limits_{n=1}^{k-1}F(T_{i_n})$ 到自身，因而由〔11〕，有 $x_*\in\bigcap\limits_{n=1}^{k-1}F(T_{i_n})$，使得 $T_{i_k}x_*=x_*$，故 $x_*\in\bigcap\limits_{n=1}^{k}F(T_{i_n})$．由归纳法知 $\{F(T_i)\}_{i\in I}$ 具有有限交性质．证毕．

定理 2　设D是X的非空闭子集，$(T_i)_{i\in I}$ 是映D到自身的平均非扩张映象族，且 $b>0$．则 $(T_i)_{i\in I}$ 在D中有唯一公共不动点的充要条件是

$$\inf\{\|x-T_ix\|\ |x\in D\}=0\quad(\forall i\in I)．$$

证　只须注意〔1〕证明：$\forall i\in I$，$F(T_i)\neq\phi$ 的充要条件是 $\inf\{\|x-T_ix\|\ |x\in D\}=0$ 其余证明由〔2〕定理3得出．证毕．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

注　本定理并不设 $(T_i)_{i\in I}$ 的连续性，故是〔2〕定理3的推广。

定理3　设X是Banach空间，D为X的非空有界闭凸集，$(T_i)_{i\in Z}$ 是满足条件（Ⅱ）的映D→D的映象列，其中函数 Φ 除满足条件（Φ_1）外，还满足下面的条件

$$(\Phi_2):\ \Phi(t,t,t,0,t)<t,\quad \forall t>0.$$

设对每一 $x_1\in D$，$M(x_1,a_n,\beta_n,T_n)=(x_n)_{n\in Z}$ 为Ishikawa迭代序列，其中 a_n，β_n 满足

$$0<a\leq a_n\leq 1,\quad 0\leq\beta_n\leq 1,\quad (n=1,2,\cdots)$$

则下列命题等价：

（i）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；　（ii）$F(T)\neq\phi$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,F(T))=0$；

（iii）$\omega_s(x)\neq\phi$，且 $\omega_s(x)\subseteq F(T)$；　（iv）$\omega_s(x)\neq\phi$，且 $\omega_s(x)\subseteq E(x)$，

其中 $\omega_s(x)=\{x\in X:\ x_{n_k}\to x,\ (x_{n_k})$ 为 (x_n) 的子列$\}$，$E(x)=\{x\in X:\ \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|$ 存在$\}$，$d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$。

证　（i）⇒（ii）设 $x_n\to u\in D$，下证 $u\in F(T)$。事实上，因

$$\|x_{x+1}-x_n\|=a_n\|T_ny_n-x_n\|\geq a\|T_ny_n-x_n\|,\tag{3}$$

其中 $y_n=\beta_nT_nx_n+(1-\beta_n)x_n$，故

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ny_n\|=0\tag{4}$$

由条件（Ⅱ）有

$$\|T_nx_n-T_ny_n\|\leq\Phi(\|x_n-y_n\|,\|x_n-T_nx_n\|,\|y_n-T_ny_n\|,\|x_n-T_ny_n\|,\|y_n-T_nx_n\|)\tag{5}$$

其中

（a）$\|x_n-T_nx_n\|\leq\|x_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-T_nx_n\|$；

（b）$\|x_n-y_n\|=\beta_n\|x_n-T_nx_n\|\leq\|x_n-T_nx_n\|$；

（c）$\|y_n-T_ny_n\|\leq\|y_n-x_n\|+\|x_n-T_ny_n\|$；

（d）$\|y_n-T_nx_n\|=(1-\beta_n)\|x_n-T_nx_n\|\leq\|x_n-T_nx_n\|$，

把上述4式代入（5）式，然后两端让 $n\to\infty$ 取上极限，由 Φ 的上半连续性及D的有界性，令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_nx_n-T_ny_n\|=r<+\infty$$

于是由（4），（5）即得 $r\leq\Phi(r,r,r,0,r)$，由条件（Φ_2）得 $r=0$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx_n-T_ny_n\|=0\tag{6}$$

由（4），（6）和 $x_n\to u$ 的假定，可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_nx_n\|\leq\lim_{n\to\infty}(\|x_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-T_nx_n\|)=0\tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx_n-u\|\leq\lim_{n\to\infty}(\|T_nx_n-x_n\|+\|x_n-u\|)=0\tag{8}$$

另由条件（Ⅱ）

$$\|T_iu-T_nx_n\|\leq\Phi(\|u-x_n\|,\|u-T_iu\|,\|x_n-T_nx_n\|,\|u-T_nx_n\|,\|x_n-T_iu\|),$$

在上式两端令 $n\to+\infty$，取上极限，并注意（7）和（8），得

$$\|T_iu-u\|\leq\Phi(0,\|u-T_iu\|,0,0,\|u-T_iu\|),$$

由条件（Φ_2），$\|T_iu-u\|=0$，$(i=1,2,\cdots)$，得 $u\in F(T)$。

（ii）⇒（iii）设 $p\in F(T)$，$\forall n,m\in Z$，不妨设 $m>n$，由（2）式，

$$\|x_n-x_m\|\leq\|x_n-p\|+\|x_m-p\|\leq\|x_n-p\|+\|x_{m-1}-p\|\leq\cdots\leq 2\|x_n-p\|$$

从而 $\|x_n-x_m\|\leq 2d(x_n,F(T))$。由假定 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,F(T))=0$，故 (x_n) 为D中的Cauchy列，由D的完备性，设 $x_n\to u\in D$，因而有 $\omega_s(x)=\{u\}$，另由前段证明知 $u\in F(T)$，$\therefore\omega_s(x)\subseteq F(T)$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 设$u \in \omega_s(x) \subseteq F(T)$, 由 (2) 式 $\| x_{n+1} - u \| \leq \| x_n - u \|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 故 $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - u \|$存在, $\therefore u \in E(x)$ 即$\omega_s(x) \subseteq E(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) 设$u \in \omega_s(x)$, 故有子列 $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ 使得 $\| x_{n_k} - u \| \to 0$, 又因$u \in E(x)$, $\therefore$ $x_n \to u$. 证毕.

推论 1 设X, D如定理 3 所述. $(T_i)_{i \in Z}$ 是映D$\to$D的平均非扩张映象列, 在定义 3 的条件 (Ⅰ) 中$c > 0$, 则定理 3 的结论仍成立.

证 取$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = at_1 + bt_2 + bt_3 + ct_4 + ct_5$, 则$\Phi$满足条件 (Φ_2). 分析定理 3 的证明, 在 (i) $\Rightarrow$ (ii) 中仅用到条件 (Φ_2), 故 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明仍成立. 易见, 其余的证明与定理 3 相同. 证毕.

定理 4 设D为Banach空间X的有界闭凸集, $(T_i)_{i \in Z}$是映D$\to$D的平均非扩张映象列, $\forall x_1 \in D$, $M(x_1, a_n, \beta_n, T_n) = (x_n)_{n \in Z}$是Ishikawa迭代序列, 其中$a_n$, β_n满足下列条件:

$0 < a \leq a_n \leq 1$, $0 \leq \beta_n \leq 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 且$\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 0$, 则定理 3 的结论仍成立.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设$x_n \to u$, 要证$u \in F(T)$. 因 $\| x_{n+1} - x_n \| = a_n \| T_n y_n - x_n \| \geq a \| T_n y_n - x_n \|$, 其中$y_n = \beta_n T_n x_n + (1 - \beta_n) x_n$, 故$\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - T_n y_n \| = 0$, 即 (4). 由假定$\beta_n \to 0$, 又D有界, 故$y_n \to u$. 由 (4) 式得$T_n y_n \to u$. 另由条件 (Ⅰ) 可得

$$\| T_i u - T_n y_n \| \leq a \| u - y_n \| + b(\| u - T_i u \| + \| y_n - T_n y_n \|) + c(\| u - T_n y_n \| + \| T_i u - y_n \|) \quad (9)$$

在 (9) 式中令$n \to \infty$可得: $\| T_i u - u \| \leq (b - c) \| T_i u - u \|$; 因$b - c < 1$. 必须有$T_i u = u$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 即$u \in F(T)$. 显然$\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, F(T)) = 0$. 其余证明同定理 3. 证毕.

引理 4 设D是一致凸Banach空间X中的非空闭凸集. $(T_i)_{i \in Z}$是D$\to$D的拟非扩张映象列且$F(T) \neq \phi$. $\forall x_1 \in D$, $M(x_1, a_n, \beta_n, T_n) = (x_n)_{n \in Z}$是Ishikawa迭代序列, 其中$a_n$, β_n满足 $0 < a \leq a_n \leq \beta < 1$, $0 \leq \beta_n \leq 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 则 (i) $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x_{n+1} \| = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - T_n y_n \| = 0$, 其中 $y_n = \beta_n T_n x_n + (1 - \beta_n) x_n$.

证 因 $\| x_{n+1} - x_n \| = a_n \| T_n y_n - x_n \| \leq \| T_n y_n - x_n \|$ (10)

如能证明$\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - T_n y_n \| = 0$, 则引理得证.

事实上, 取$p \in F(T)$, 由引理 2 的 (2) 式有 $\| x_{n+1} - p \| \leq \| x_n - p \|$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 可见$\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - p \| = d$存在. 由 (10) 有

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq \| T_n y_n - x_n \| \leq \| T_n y_n - p \| + \| x_n - p \| \leq \| y_n - p \| + \| x_n - p \| \leq \beta_n \| T_n x_n - p \| + (2 - \beta_n) \| x_n - p \| \leq 2 \| x_n - p \| \quad (11)$$

若$d = 0$, 由 (11) 式知命题得证. 下设$d > 0$. 若 $\{ \| T_n y_n - x_n \| \}$ 不收敛于 0, 由 (11) 式知它是有界数列, 于是存在子列 $\{ \| x_{n_k} - T_{n_k} y_{n_k} \| \}$ 使得$\lim\limits_{k \to \infty} \| x_{n_k} - T_{n_k} y_{n_k} \| = r \neq 0$, 故

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| x_{n_k} - T_{n_k} y_{n_k} \|}{\| x_{n_k} - p \|} = \frac{r}{d} > 0 \quad (12)$$

取$\varepsilon \in (0, \frac{r}{d})$, 则存在$N \in Z$, 当$k \geq N$时有$\frac{\| x_{n_k} - T_{n_k} y_{n_k} \|}{\| x_{n_k} - p \|} \geq \varepsilon$. 令$w_k = \frac{x_{n_k} - p}{\| x_{n_k} - p \|}$, $z_k = \frac{T_{n_k} y_{n_k} - p}{\| x_{n_k} - p \|}$, 则 $\| w_k \| = 1$, $\| z_k \| \leq 1$, 且 $\| w_k - z_k \| \geq \varepsilon$ $(k \geq N)$. 由引理 3 有

$$\frac{\| x_{n_k+1} - p \|}{\| x_{n_k} - p \|} = \frac{\| a_{n_k} T_{n_k} y_{n_k} + (1 - a_{n_k}) x_{n_k} - p \|}{\| x_{n_k} - p \|} = \| a_{n_k} Z_k + (1 - a_{n_k}) w_k \| \leq$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$1-2\delta(\varepsilon)\min(1-\alpha_{n_k},\alpha_{n_k})\leq 1-2\delta(\varepsilon)\cdot\theta<1$, ($\forall k\geq N$)

其中$\theta=\min(1-\beta,a)$，故$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\|x_{n_{k+1}}-p\|}{\|x_{n_k}-p\|}<1$，这与上式左端的极限为1相矛盾，故$\|x_n-T_ny_n\|\to 0$，证毕。

注 〔10〕的定理4是上述引理的特别。

定理5 设D是一致凸Banach空间X中的非空闭凸集，$(T_i)_{i\in Z}$是D→D满足条件（Ⅱ）的映象列，其中函数Φ满足条件（Φ_1）。任取$x_1\in$ D，$M(x_1,\alpha_n,\beta_n,T_n)=(x_n)_{n\in Z}$是Ishikawa迭代叙列，其中$0<a\leq\alpha_n\leq\beta<1$；$0\leq\beta_n\leq 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。若F($T$)$\neq\phi$，则F($T$)只有唯一元；比如$u\in$ F(T)，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=u$。

证 设F(T)$\neq\phi$，由条件（Ⅱ）易证F(T)是单点集。设F(T)$=\{u\}$，于是引理4的条件都满足，故有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ny_n\|=0 \tag{13}$$

由引理1和（2）式知$\|T_nx_n-u\|\leq\|x_n-u\|\cdots\leq\|x_1-u\|$，$\|T_ny_n-u\|\leq\|y_n-u\|\leq\|x_n-u\|\leq\cdots\leq\|x_1-u\|$ ($n\geq 1$)，故(T_nx_n),(T_ny_n)，$(x_n)(n\in$ Z）都是D中的有界点列。由（13）式及$\beta_n\to 0$得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-T_ny_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\beta_nT_nx_n+(1-\beta_n)x_n-T_ny_n\|=0. \tag{14}$$

由条件（Ⅱ）知

$$\|T_ny_n-T_jy_j\|\leq\Phi(\|y_n-y_j\|,\|y_n-T_ny_n\|,\|y_j-T_jy_j\|,\|y_n-T_jy_j\|,\|y_j-T_ny_n\|) \tag{15}$$

其中

(a) $\|y_n-y_j\|\leq\|y_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-T_jy_j\|+\|T_jy_j-y_j\|$,

(b) $\|y_n-T_jy_j\|\leq\|y_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-T_jy_j\|$,

(c) $\|y_j-T_ny_n\|\leq\|y_j-T_jy_j\|+\|T_jy_j-T_ny_n\|$.

令$\overline{\lim\limits_{j,n\to\infty}}\|T_ny_n-T_jy_j\|=d_1<+\infty$，把（$a$）—（$c$）代入（15）并让$j,n\to\infty$，取上极限，利用（14）及$\Phi$的上半连续性可得$d_1\leq\Phi(d_1,0,0,d_1,d_1)$。

由条件（Φ_1)，必须$d_1=0$。故$(T_ny_n)_{n\in Z}$是D中的Cauchy列，设$T_ny_n\to w$，由（13）式知有$x_n\to w$。如果能证明$w\in$ F(T)，则定理得证。

事实上，由（13）和（14）式得

$$\|x_n-y_n\|\leq\|x_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-y_n\|\to 0 \tag{16}$$

另由条件（Ⅱ）有

$\|T_nx_n-T_ny_n\|\leq\Phi(\|x_n-y_n\|,\|x_n-T_nx_n\|,\|y_n-T_nx_n\|,\|x_n-T_ny_n\|,\|y_n-T_nx_n\|)$，

其中$\|x_n-T_nx_n\|\leq\|x_n-T_ny_n\|+\|T_ny_n-T_nx_n\|$，$\|y_n-T_nx_n\|=(1-\beta_n)\cdot\|x_n-T_nx_n\|\leq\|x_n-T_nx_n\|$。

令$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T_nx_n-T_ny_n\|=r<+\infty$，于上式两端令$n\to\infty$取上极限，则有$r\leq\Phi(0,r,0,0,r)$。由条件（$\Phi_1$）知$r=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx_n-T_ny_n\|=0$。其余的证明仿定理1的（i）⇒（ii），可证$w\in$ F(T)。证毕。

推论2 设X，D如定理5所述，$(T_i)_{i\in Z}$是D→D的平均非扩张映象列，其中条件（Ⅰ）的$b>0$，且F(T)$\neq\phi$，则定理5的结论成立。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

〔证〕 取$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=(at_1-b(t_2+t_3)+c(t_4+t_5))$，则$\Phi$满足条件（$\Phi_1$）．由定理5即得．证毕．

注 Shimi〔8〕中的定理2和3．当$b=0$时是推论2的特例（取$T_n=T$，$a_n=\frac{1}{2}$，$\beta_n=0$，$n=1,2,\cdots$），并且我们在这里不需要假设T连续和$T(D)$紧；推论1还改进和推广了Bose，Mukherjee〔3〕中定理4和6．

定理6 设X是满足Opial条件的一致凸空间，D是X的非空闭凸集，$(T_i)_{i\in Z}$是D→D的平均非扩张映象列，$F(T)\neq\phi$．任取$x_1\in D$，则Ishikawa迭代序列$M(x_1,a_n,\beta_n,T_n)=(x_n)_{n\in Z}$弱收敛于$F(T)$中的元素，其中$0<a\le a_n\le\beta<1$，$0\le\beta_n\le1$，且$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$．

证 若在定义3的条件（Ⅰ）中$b>0$，则命题为上面推论2．故仅需证明$b=0$的情形．

任取$p\in F(T)$．由引理1及（2）式得$\|T_nx_n-p\|\le\|x_n-p\|\le\|x_{n-1}-p\|$ $(n>1)$，故(T_nx_n)、(x_n)是D中的有界点列，且$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在．记$\varphi(p)=\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ $(p\in F(T))$．取r充分大，使$r\ge\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n\|$，且使得

$$F_1(T)\equiv F(T)\cap\{x\mid x\in X,\ \|x\|\le r\}\neq\phi.$$

因$\forall n\in Z$，$F(T_n)$为D中的闭凸集（见〔1〕），∴$F(T)=\bigcap_{n\in Z}F(T_n)$为闭凸集，于是$F_1(T)$为D中的有界闭凸集．

1°．$\varphi(p)$是$F(T)$上的连续凸函数．这由下面的不等式即知．

因$\forall p_1,p_2\in F(T)$，$|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)|\le\|p_1-p_2\|$，$\forall\lambda\in(0,1)$，有$\varphi[\lambda p_1+(1-\lambda)p_2]\le\lambda\varphi(p_1)+(1-\lambda)\varphi(p_2)$．上面这两个不等式，由$\varphi(p)$的定义即知．

2°．$\varphi(p)$在$F_1(T)$上有最小值d．因X自反，故$F_1(T)$是X中的弱紧凸集．另由凸函数的性质知，$\varphi(p)$在$F_1(T)$上是弱下半连续．故$\exists x_0\in F_1(T)$，使$\varphi(x_0)=\inf\{\varphi(p):p\in F_1(T)\}=d\ge0$．

3°　$x_n\xrightarrow{w}x_0$．若$d=0$，则命题证毕；下设$d>0$．先证$\varphi(p)$在$F_1(T)$上取得最小值的x_0是唯一的．

事实上，若有另一个$x'\in F_1(T)$使$\varphi(x')=d$，由于φ为凸函数，$\forall\lambda\in(0,1)$，$d\le\varphi[\lambda x_0+(1-\lambda)x']\le\lambda\varphi(x_0)+(1-\lambda)\varphi(x')=d$，故$d=\varphi(\frac{x_0+x'}{2})=\lim_{n\to\infty}\|x_n-\frac{x_0+x'}{2}\|$．又因$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=d=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x'\|$，X是一致凸的，故有$\|x_0-x'\|=\|(x_n-x_0)-(x_n-x')\|\to0$ $(n\to\infty)$．从而$x_0=x'$．再证$x_n\xrightarrow{w}x_0$．

假若不然，因X自反，$(x_n)_{n\in Z}$有界，故有(x_n)的子列$x_{n_i}\xrightarrow{w}u\in D$，且$u\neq x_0$．要证$u\in F_1(T)$：

由引理4有$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ny_n\|=0$　　(17)

又因$\beta_n\to0$，故$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\beta_n\|T_nx_n-x_n\|=0$ ．　　(18)

任取$i\in Z$，由（17）和（18）式易见

$$(*)\quad\begin{cases}\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-T_iu\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|T_{n_k}y_{n_k}-T_iu\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|y_{n_k}-T_iu\|\\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|T_{n_k}y_{n_k}-u\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|y_{n_k}-u\|.\end{cases}$$

由条件（Ⅰ）得：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\|T_{n_k}y_{n_k}-T_iu\|\le a\|y_{n_k}-u\|+c(\|y_{n_k}-T_iu\|+\|T_{n_k}y_{n_k}-u\|).$$

在上式中令$k\to\infty$，取上极限，并利用等式（＊）得：

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-T_iu\|\le a\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|+c(\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-T_iu\|+\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|),$$

即$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-T_iu\|\le\left(\dfrac{a+c}{1-c}\right)\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|\le\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|$.

由Opial条件，必须$T_iu=u$.（$i\in Z$）故$u\in F(T)$. 又因$\|u\|\le\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}\|\le r$，而有$u\in F_1(T)$. 再利用Opial条件得：

$$\varphi(u)=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-u\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-u\|<\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-x_0\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x_0\|=\varphi(x_0).$$

这与x_0是φ在$F_1(T)$上的唯一最小值点相矛盾. 证毕.

注 若$T_n=T$（$n=1,2,\cdots,$）且$\beta_n=0$. 则得〔1〕的定理10：若再令条件（Ⅰ）中的$a=1$，$a_n=\lambda\in(0,1)$. 则得〔12〕中的定理3.

参考文献

〔1〕傅俊义，关于平均非膨胀映射的不动点和迭代法，江西大学学报（自然科学版），4期（1982），p1—10.

〔2〕张石生，关于映象族的公共不动点，四川大学学报（自然科学版），2期（1980），p.55—66.

〔3〕R.K.Bose, R.N.Mukherjee, Approximating fixed points of some mappings, Proc.AMS., V.82.No 4.(1981), 603—606.

〔4〕G.Emmanuek, Convergence of the Mann-Ishikawa iterative process for nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis, TMA.V.6.№.10(1982) 1135—1141.

〔5〕S.Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc.AMS, 44(1974), 147—150.

〔6〕~, Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach Space, Proc.AMS, 55(1976), 65—71.

〔7〕H.F.Senter and W.G.Dotson, Jr., Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. AMS., 44(1974), 375—379.

〔8〕T.N.Shimi, Approximation of fixed points of certain nonlihear mappings, J.Math.Anal.Appl. 65(1978), 565—571.

〔9〕C.W.Groetsch, A note on segmenting Mann iterates, J.Math.Anal.Appl., 40(1972), 369—372.

〔10〕W.G.Dotson, Jr., On the Mann iterative process, Trans.AMS., 149(1970), 65—73.

〔11〕赵汉宾，Banach空间中的平均非扩张映象，不动点的存在定理，数学学报，22卷4期（1979），459—470.

〔12〕Z.Opial, Weak Convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull.AMS, 73(1967), 591—597.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.