1986年10月

数学研究与评论
第六卷　第四期

关于Λ-有序有界变差*

卢　志　康

（杭州师范学院）

§1 前　　言

设$f(x)$是定义在一个区间上的实函数．对每一个区间$I=[a, b]$，记$f(I)=f(b)-f(a)$．若区间J处于区间I的右边，则记之为$I<J$或$J>I$．若对每一j有$I_j<I_{j+1}$，（或$I_j>I_{j+1}$），则称$\{I_n\}$为有序的．Λ表示单调不减的正数序列$\{\lambda_n\}$，它满足条件

$$\sum_{n=1}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty. \tag{1}$$

如果

$$\sup\sum|f(I_n)|/\lambda_n<+\infty, \tag{2}$$

其中，记号sup表示关于区间$I=[a,b]$内每一互不重叠的区间列$\{I_n\}$取上确界，则称函数$f(x)$是区间I上的Λ-有界变差函数，记作$f\in\Lambda BV$，区间函数$V_\Lambda(I)=V_\Lambda(f;I)=\sup\sum|f(I_n)|/\lambda_n$称为$f$在I上的Λ-全变差，$\mathscr{V}_\Lambda(x)=\mathscr{V}_\Lambda(f;[a,x])$称为$f$的Λ-变差函数．特别，当$\lambda_n=n$时，称$f$为调和有界变差函数，记作$f\in HBV$．

如果（2）式中sup表示关于每一有序的$\{I_n\}$取上确界，则称f是Λ-有序有界变差，记作$f\in O\Lambda BV$，而相应的区间函数$V_{O\Lambda}(I)=V_{O\Lambda}(f;I)$称为$f$在I上的Λ-有序全变差，$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x)=\mathscr{V}_{O\Lambda}(f;[a,x])$称为Λ-有序全变差函数．显然，$O\Lambda BV\supset\Lambda BV$．C.L.Belna[1]证明了HBV是OHBV的真子集．

定理A　存在一个连续函数$f\in OHBV\setminus HBV$．

此外，Waterman[2,3]指出，HBV类的有些性质OHBV类并不再具备．例如，对于ΛBV类函数，$\mathscr{V}_\Lambda(x)$与$f(x)$在每一点有相同的连续性，但是关于OHBV函数，却有

定理B　存在一个连续函数$f\in OHBV$，它的调和有序变差函数$\mathscr{V}_{OH}(x)$不连续．

Waterman[6]曾问到：对于一般的$\Lambda=\{\lambda_n\}$，情况将会怎样？本文目的即是回答这个问题．§2中我们将先给出一个一般性的定理．

定理1　设$\{\lambda_n\}$是满足（1）的单调不减的正数序列，如果存在单调不增的正数序列$\{A_n\}$满足

i）
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\lambda_n}=+\infty, \tag{3}$$

ii）存在绝对常数C，使对任何$1\le t\le s$成立
$$\sum_{j=1}^{t}\frac{A_{s-1-j}}{\lambda_j}\le C, \tag{4}$$

那么，存在一个连续函数$f\in O\Lambda BV\setminus\Lambda BV$，并且，它的Λ-有序全变差函数$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x)$不连续

在§3，我们将给出一些引理，用来说明对于很广泛一类$\{\lambda_n\}$，例如，对于$\lambda_n=n^\alpha\mu_n$，

* 1984年2月7日收到．

$\lambda_n=\mu_n\lg^a n$，$\lambda_n=\mu_n\lg^a\lg n$，…，其中 $a>0$，$\{\mu_n\}$ 是单调不减的正数序列，$\mu_n=o(n^\beta)$，$(0<\beta<1)$，定理1的条件是满足的。

D. Waterman [2] 曾证明Λ-有界变差有一个等价的定义。

定理C $f\in\Lambda BV$ 的充要条件是对 I 中每一不相重叠的区间列 $\{I_n\}$，

$$\sum|f(I_n)|/\lambda_n<+\infty \tag{5}$$

在§4，我们将指出，对于定义 OΛBV 类函数，(2) 不再与 (5) 等价。

§2 定理Ⅰ的证明

取 $\varepsilon_k>0$ $(k=1,2,\cdots)$，使 $\sum\varepsilon_k<+\infty$。记 $M_1=1$，利用（3）式及 $\frac{A_n}{\lambda_n}$ 趋于零的特性，可得到 $T_1>M_1$ 使 $\frac{1}{\varepsilon_1}<\sum_{j=1}^{T_1}\frac{A_j}{\lambda_j}<\frac{2}{\varepsilon_1}$。

记 $D_j=\varepsilon_1A_j$ $(1\le j\le T_1)$，则有 i) $\sum_{j=1}^{M_1}D_j/\lambda_j\le\varepsilon_1$ ii) $1<\sum_{j=1}^{T_1}\frac{D_j}{\lambda_j}<2$；再由（4），可有iii) $\sum_{j=1}^{t}D_{t+1-j}/\lambda_j<C\varepsilon_1$ $(1\le t\le T_1)$。

选 $M_2>T_1$ 使 $\sum_{j=1}^{T_1}D_j/\lambda_{M_2+j}<\varepsilon_1$。记 $E_2=\sum_{j=1}^{M_2}A_{T_1+j}/\lambda_j+1$，取 $T_2>M_2$ 使 $\frac{E_2}{\varepsilon_2}<\sum_{j=1}^{T_2}A_{T_1+j}/\lambda_j<2\frac{E_2}{\varepsilon_2}$，记 $D_j=\frac{\varepsilon_2}{E_2}A_j$，$(T_1<j\le T_1+T_2)$，则有 i) $\sum_{j=1}^{M_2}D_{T_1+j}/\lambda_j<\varepsilon_2$，ii) $1<\sum_{j=1}^{T_2}D_{T_1+j}/\lambda_j<2$，iii) $\sum_{j=1}^{t}D_{T_1+t+1-j}/\lambda_j<C\varepsilon_2$，$(1\le t\le T_2)$。

继续上述过程，由归纳法，可得到正整数序列 $M_1,M_2,\cdots$，和 $T_1,T_2,\cdots$，满足 $M_k<T_k<M_{k+1}$ $(k\ge1)$；还得正数序列 $\{D_n\}$，满足 a) $\sum_{j=1}^{M_k}D_{\sigma_k+j}/\lambda_j<\varepsilon_k$，其中，$\sigma_k=\sum_{j=0}^{k-1}T_j$，$T_0=0,k\ge1$，b) $1<\sum_{j=1}^{T_k}D_{\sigma_k+j}/\lambda_j<2$，c) $\sum_{j=1}^{t}D_{\sigma_k+t+1-j}/\lambda_j<C\varepsilon_k$，$(1\le t\le T_k)$，d) $\sum_{j=1}^{T_k}D_{\sigma_k+j}/\lambda_{M_{k+1}-j}<\varepsilon_k$。

作互不重叠的区间列 $\{I_n=[a_n,b_n]\}$，使对每一 k 有

$$I_i<I_{\sigma_k+j}<I_{\sigma_k+j+1},\quad(j=1,2,\cdots,\sigma_{k+1}-\sigma_k-1;\ i>\sigma_{k+1}). \tag{6}$$

再作连续函数 f，使 $f(\frac{a_n+b_n}{2})=D_n$，$n=1,2,\cdots$，当 $x\bar{\in}\bigcup I_n$ 时，使 $f(x)=0$，而在 $\bigcup I_n$ 上，$f(x)$ 是逐段线性的。由 $\{I_n\}$ 的构造，$\{a_{\sigma_k}\}$ 是单调下降序列，记 $a_{\sigma_k}\to x_0$，我们将证明 $f\in O\Lambda BV\setminus\Lambda BV$，且 $\mathcal{V}_{O\Lambda}(x)$ 在点 x_0 不连续。

为了证明 $f\in O\Lambda BV$，只需对由 $\{I_n^*\}=\{[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]\}$ 中的区间组成的有序区间列 $\{J_n\}$ 证明

$$\sup\sum|f(J_n)|/\lambda_n<+\infty. \tag{7}$$

设$J_1>J_2>\cdots$，则由c）及λ_n、A_n的单调性可得

$$\sum|f(J_n)|/\lambda_n\le C\sum\varepsilon_k<+\infty. \tag{8}$$

设$J_1<J_2<\cdots$，则以$\sum_k|f(J_n)|/\lambda_n$表示关于取自$\{I_n^*,\ \sigma_k<n\le\sigma_k+T_k\}$的$J_n$的求和，显见$\sum_k|f(J_n)|/\lambda_n\le\sum_{j=1}^{t_k}D_{\sigma_k-j}/\lambda_j$，其中$t_k$表示这种$J_n$的数目，当$t_k\le M_k$时，由a）有$\sum_k|f(J_n)|/\lambda_n<\varepsilon_k$. 若有一$k_0$使$t_{k_0}>M_{k_0}$，则由b）有$\sum_{k_0}|f(J_n)|/\lambda_n<2$. 而在这种$J_n$后面只能是取之于$\{I_n^*,\ \sigma_k<n\le\sigma_k+T_k,\ k<k_0\}$的区间，而且只能处于第$M_{k_0}$项之后. 由于d）及$M_{k_0}>M_k$，$(k<k_0)$，我们有

$$\sum_k|f(J_n)|/\lambda_n<\sum_{j=1}^{t_k}D_{\sigma_k-j}/\lambda_{M_{k_0}-j}<\varepsilon_k,\ k<k_0.$$

将上述估计合并起来，即得

$$\sum|f(J_n)|\lambda_n\le 2+\sum\varepsilon_k<+\infty. \tag{9}$$

（8）与（9）合起来就得到了（7）式，固而$f\in O\Lambda BV$.

其次，证明$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x)$在点$x_0$不连续. 显然，当$x\le x_0$时，$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x)\equiv0$，但对任一$\delta>0$，由于当$k$充分大时有$I_n^*\subset[x_0,\ x_0+\delta]$，$\sigma_k<n\le\sigma_k+T_k=\sigma_{k+1}$，所以，如取$\{J_n\}=\{I^*_{\sigma_k+1},\ I^*_{\sigma_k+2},\ \cdots,\ I^*_{\sigma_k+T_k},\ \cdots\}$，则由b）有

$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x_0+\delta)\ge\sum_{j=1}^{T_k}|f(I^*_{\sigma_k+j})|/\lambda_j=\sum_{j=1}^{T_k}D_{\sigma_k-j}/\lambda_j>1$，这就说明$\mathscr{V}_{O\Lambda}(x)$在$x_0$不连续.

最后，我们来证明$f\in\Lambda BV$. 如$f\in\Lambda BV$，那末，当$x\le x_0$时，$\mathscr{V}_\Lambda(x)\equiv0$，而对任一$\delta>0$，将有$\mathscr{V}_\Lambda(x_0+\delta)\ge\mathscr{V}_{O\Lambda}(x_0+\delta)>1$. 即$\mathscr{V}_\Lambda(x)$在$x_0$将不连续，这是不可能的、所以$f\in\Lambda BV$. 定理证毕.

§3 一些引理

引理1：设$\{\lambda_n\}$是满足（1）的单调不减的正数序列. 如果

$$\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{n}=O(\lambda_n), \tag{10}$$

那么，单调不增的正数序列 $A_n=\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda_j}}$，$n=1,2,\cdots$满足定理1中的条件.

证明 （3）式的成立是Abel 的定理的结果.（见〔4〕，定理162）. 而由A_n的单调性有

$$\sum_{j=1}^{t}\frac{A_{s+1-j}}{\lambda_j}\le\sum_{j=1}^{t}\frac{A_{s+1-j}}{\lambda_j}=\sum_{j=1}^{[\frac{t}{2}]}+\sum_{[\frac{t}{2}]+1}^{t}=J_1+J_2$$

其中$J_1\le A_{t+1-[\frac{t}{2}]}\sum_{j=1}^{[\frac{t}{2}]}\frac{1}{\lambda_j}\le1$. 而由于$A_n\le\frac{\lambda_n}{n}$及（10），

$J_2 \leq \frac{1}{\lambda_{[\frac{l}{2}]+1}}(A_1 + A_2 + \cdots + A_{l-[\frac{l}{2}]}) = \frac{1}{\lambda_{[\frac{l}{2}]+1}} O(\lambda_{l-[\frac{l}{2}]}) = O(1)$．这就证明了（4）．引理证毕．

推论 1 设 $\{\lambda_n = n^{\alpha}\mu_n\}$，其中 $\alpha > 0$，$\{\mu_n\}$ 是单调不减的正数序列，$\sum \frac{1}{n^{\alpha}\mu_n} = +\infty$，那么，存在连续函数 $f \in \mathrm{O\Lambda V} \setminus \mathrm{\Lambda BV}$．并且 f 的 Λ-有序全变差函数 $\mathscr{V}_{\mathrm{O\Lambda}}(x)$ 不连续．

为了讨论诸如 $\{\lambda_n = \lg(n+1)\}$ 的情况，我们还需要．

引理 2 设 $\{\lambda_n\}$ 是满足（1）的单调不减的正数序列，如果 $\lambda_n = o(n^{\beta})$，其中 $0 < \beta < 1$，且

$$\frac{\lambda_1}{\lg^2} + \frac{\lambda_2}{2\lg^3} + \cdots + \frac{\lambda_n}{n\lg(n+1)} = O(\lambda_n), \tag{11}$$

那么，单调不增的正数序列 $A_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \lg \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}}$，$n = 1, 2, \cdots$，满足定理 1 中的条件．
$n = 1, 2, \cdots$，满足定理 1 中的条件．

证明 （3）的成立可见〔5〕．（4）式的证明也与引理 1 类同．现在，J_2 的估计可由

$$A_n \leq \frac{\lambda_n}{n\lg\frac{n}{\lambda_n}} = O\left(\frac{\lambda_n}{n\lg(n+1)}\right).$$

及（11）式推出．

推论 2 设 $\{\lambda_n = \mu_n \lg^{\alpha} n\}$，其中 $\alpha > 0$，$\{\mu_n\}$ 是单调不减的正数序列，$\mu_n = o(n^{\beta})$，$(0 < \beta < 1)$，那末，存在连续函数 $f \in \mathrm{O\Lambda BV} \setminus \mathrm{\Lambda BV}$，并且 f 的 Λ-有序全变差函数 $\mathscr{V}_{\mathrm{O\Lambda}}(x)$ 不连续．

上述讨论可以继续下去，例如，可以证明，当 $\alpha > 0$，$\{\mu_n\}$ 是单调不减的正数序列，$\mu_n = o(n^{\beta})$，$(0 < \beta < 1)$，$\lambda_n = \mu_n \lg^{\alpha}\lg n$ 时，存在连续函数 $f \in \mathrm{O\Lambda BV} \setminus \mathrm{\Lambda BV}$，并且 f 的 Λ 有序全变差函数 $\mathscr{V}_{\mathrm{O\Lambda}}(x)$ 不连续．

§ 4 关于 OΛBV 的定义

定理 2 如果 $\{\lambda_n\}$ 满足定理 1 的条件，那么存在连续函数 $f(x)$，对于每一有序的 $\{\mathrm{I}_n\}$，（5）式成立，但 $f \bar{\in} \mathrm{O\Lambda BV}$．

证明 取 $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$，使 $\sum \varepsilon_k < +\infty$．由于（3）式，用归纳的方法可以取

$$\sigma_0 = 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k < \cdots，使$$

$$\sum_{j=\sigma_{k-1}+1}^{\sigma_k} \frac{A_j}{\lambda_j} > \frac{k}{\varepsilon_k}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{12}$$

记 $B_j = \varepsilon_k A_j$，$\sigma_{k-1} < j \leq \sigma_k$，$k = 1, 2, \cdots$．并类同于定理 1 的证明，作满足（6）的区间列 $\{\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]\}$ 及连续函数 $f(x)$，使 $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = B_n$，$n = 1, 2, \cdots$，当 $x \bar{\in} \bigcup \mathrm{I}_n$ 时，使 $f(x) = 0$，而在其余地方，$f(x)$ 是线性的．

记 $\mathrm{I}_n^* = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$，显然，为了证明（5）式成立，我们只要考虑由 $\{\mathrm{I}_n^*\}$ 中取出的有序 $\{\mathrm{J}_n\}$．

当 $\mathrm{J}_1 < \mathrm{J}_2 < \cdots$ 时，$\{\mathrm{J}_n\}$ 只由有限个区间构成，因而（5）式当然成立．

当 $\mathrm{J}_1 > \mathrm{J}_2 > \cdots$ 时，以 $\sum_k |f(\mathrm{J}_n)| / \lambda_n$ 表示关于取自 $\{\mathrm{I}_n^*, \sigma_{k-1} < n \leq \sigma_k\}$ 的 J_n 所作的和．

应用（4）得到

$$\sum_k |f(\mathrm{J}_n)|/\lambda_n \leq \sum_{j=1}^{t} |f(\mathrm{I}^*_{\sigma_{k-1}+t+1-j})|/\lambda_j = \varepsilon_k \sum_{j=1}^{t} A_{\sigma_{k-1}+t+1-j}/\lambda_j < C\varepsilon_k,$$

因而 $\sum |f(\mathrm{J}_n)|/\lambda_n < C \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$. 但是，$f\in \mathrm{O\Lambda BV}$. 因为，若取

$\{\mathrm{J}_n\} = \{\mathrm{I}^*_{\sigma_{k-1}+n}\}_{n=1}^{\sigma_k-\sigma_{k-1}}$，则由（12）有

$$\sum |f(\mathrm{J}_n)|/\lambda_n = \varepsilon_k \sum_{n=1}^{\sigma_k-\sigma_{k-1}} \frac{A_{\sigma_{k-1}+n}}{\lambda_n} \geq \varepsilon_k \sum_{n=\sigma_{k-1}+1}^{\sigma_k} \frac{A_n}{\lambda_n} \geq k,$$

因而（2）式不能成立，$f\in \mathrm{O\Lambda BV}$. 定理证毕.

参 考 文 献

［1］C. L. Belna, On ordered Harmonic bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 441—444.

［2］D. Waterman, On Λ-bounded variation, Studia Math. 57 (1976), 33—45.

［3］D. Waterman, On the note of C. L. Belna, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 445—447.

［4］G. H. 哈代，J. E. 李特伍德，G. 波利亚，不等式，科学出版社，1965.

［5］J. E. Littlewood, Note on the convergence of series of Positive terms, Messenger of Math. 39 (1910), 191—192.

［6］D. Waterman, 手稿, 1983.

ON ORDERED Λ-BOUNDED VARIATION

Lu Zhikang

(Hangzhou Normal Collegc)

Abstract

In this paper we prove that the class ΛBV is contained in the class OΛBV properly and that the properties of OΛBV function are different from one of ΛBV function.