1986年10月

数学研究与评论
第六卷　第四期

有限集合上的函数和关系的完全理论中的两个未解决的问题*

杨　安　洲

（北京工业大学）

令$X=\{0,1,\cdots,n-1\}$，n是自然数；若S是集合，则用$|S|$表示S的基数（S中元素的个数）．

定义1、令x_1，x_2，…，x_n……是可数无穷多个独立的变元，任一独立变元x_m的取值范围为X；$X^m=X\times X\times\cdots\times X$（$i$、$e$、$m$个X的笛卡儿乘积）；命$\mathbf{F}(X)=\{f: f\text{是函数}\ \&\ (\exists m)(f\text{的定义域}=X^m)\ \&\ f\text{的值域}\subseteq X\}$；若$S\subseteq\mathbf{F}(X)$满足$(\forall f\in\mathbf{F}(X))(\exists f_1,\cdots,f_k\in S)(f=f_1f_2\cdots f_k)$，这里的乘积是指“函数的复合”，则称S是$\mathbf{F}(X)$的一个生成子集；说S是独立的，意指S中的任一函数不能由S中其余的某有限个函数经“函数复合”（有限次）而得到。

问题1．令$k\geq1$，$\mathbf{C}=\{S: S\text{是}\mathbf{F}(X)\text{的生成子集}\ \&\ \&S\text{是独立的}\}$，$\mathbf{C}_k=\{S_k: S_k\in\mathbf{C}\ \&\ |S_k|=k\}$，问$|\mathbf{C}_k|=?$

注1．同样的，对于“偏函数”类$\mathbf{F}^*(X)=\{f: f\text{是函数}\ \&\ (\exists m)(f\text{的定义域}\subseteq X^m)\ \&\ f\text{的值域}\subseteq X\}$而言，也可提出类似于问题1的问题。

定义2．令$x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots$　是可数无穷多个独立的变元，独立变元的取值范围是X，X^m是m个X的笛卡儿乘积，命$\mathbf{R}=\{R:(\exists m)(R\subseteq X^m)\}=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\mathbf{R}_m=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\{R_m: R_m\subseteq\mathbf{R}_m\}$，对于$R_m\in\mathbf{R}_m$可把这样的$R_m=\{(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m):(x_1,\cdots x_{m-1},x_m)\in R_m\}=R_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m)$理解作“多值函数”$x_m=f_{R_m}(x_1,\cdots,x_{m-1})$（$i$、$e$、$(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)\in R_m\Leftrightarrow x_m=f_{R_m}(x_1,\cdots,x_{m-1})$，看作是由$x_1$，…，$x_{m-1}$的一组“值”对应到$x_m$的“多个值”，$x_m$的“值”也在X中，没有值时可令其为$*$）；当对“多元关系（例如$R_k$）”（或“多值函数”）进行“关系的复合运算”时可把$R_m(x_1,x_{m-1},x_m)$理解作“多值函数$x_m=f_{R_m}(x_1,\cdots,x_{m-1})$的‘值’”，可把它（$R_m$或$f_{R_m}$）填入关系S（…□…）中的空位□上，这样就定义好了“关系的复合运算”，$i.e$.中间过程中理解作“多值函数的‘函数值’”，最后仍理解作“多元关系”：若略去了变元之后则可简洁地写成“关系的乘积形式”；若$S\subseteq\mathbf{R}$满足$(\forall R\in\mathbf{R})(\exists R^{(1)},\cdots,R^{(l)}\in S)(R=R^{(1)}\cdots R^{(l)})$，则称S是$\mathbf{R}$的一个生成子集；同样的，对S而言也有独立的概念（参考定义1）。

问题2．令$k\geq1$，$\mathbf{C}_k=\{S_k: S_k\text{是}\mathbf{R}\text{的生成子集}\ \&\ S_k\text{是独立的}\ \&\ |S_k|=k\}$．问$|\mathbf{C}_k|=?$

注2 对于问题1与问题2中的中的$\mathbf{C}_k$，还可提出：$\mathbf{C}_k$中的S_k之间有什么关系．互表出，如何得到$\mathbf{C}_k$中的任一S_k等等更为深入一些、更困难一些的问题。

---

* 1986年6月10日收到。