亚纯单叶函数的判别定理与卷积定理*

申 大 维
（北京工业学院）

§1 引 言

以$\mathscr{A}$表示$D=\{|z|<1\}$上的解析函数全体；$\mathscr{A}_0$是$\mathscr{A}$中满足$f(0)=f'(0)-1=0$的子集，$\mathscr{A}_1$是$\mathscr{A}$中满足$f(0)=1$的子集．以$\mathscr{B}_0$表示在$\Delta=\{|\zeta|>1\}$内亚纯并且具有展开式

$$g(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^{-n},\quad \zeta\in\Delta$$

的函数类．S和Σ分别$\mathscr{A}_0$和$\mathscr{B}_0$的单叶子族．对于$0\leq\alpha<1$，以$S_*(\alpha)$和$K(\alpha)$表示$\mathscr{A}_0$中分别满足

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha,\qquad z\in D \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right]>\alpha,\quad z\in D \tag{2}$$

的α-阶星形函数族和α-阶凸函数族，以$\Sigma_*(\alpha)$表示$\mathscr{B}_0$中满足

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}>\alpha,\quad \zeta\in\Delta \tag{3}$$

的α-阶亚纯星形函数族；当$\alpha=0$时，依次简记为S_*，K和Σ_*．此外，我们把K中第二项系数为零的函数全体记为K_0，熟知有

$$S\supset S_*(\alpha)\supset K(\alpha),\quad \Sigma\supset\Sigma_*(\alpha).$$

设$\varphi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$\varphi_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\in\mathscr{A}$，$\varphi_1$与$\varphi_2$的Hadamard卷积，定义为

$$\varphi_1*\varphi_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n,\qquad z\in D.$$

类似地，设$g_1(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta^{-n}$，$g_2(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\zeta^{-n}\in\mathscr{B}_0$．定义$g_1$与$g_2$的卷积为

$$g_1*g_2(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n\zeta^{-n},\quad \zeta\in\Delta.$$

*1983年11月25日收到．
本文是在杨维奇副教授指导下完成的；刘书琴教授曾审阅过并提出宝贵意见，作者谨致谢意．

对于$\mathscr{A}_1$中任一个非空子集V，称集

$$V^* = \{h\in\mathscr{A}_1 | 对一切 f\in V 及 z\in D，f*h(z)\neq 0\} \qquad (4)$$

为集V的对偶集．

对偶方法是近几年发展起来的研究单叶函数的一种新方法．〔1〕、〔8〕、〔9〕、〔10〕等文已得到一系列结果．

1973年，Ruscheweyh和Sheil Small[5]证明了著名的P'olya Schoenberg猜想：

$$f,\ \varphi\in K\Rightarrow f*\varphi\in K. \qquad (5)$$

事实上，他们的证明还包含了

$$f\in S_*(\alpha),\ \varphi\in K\Rightarrow f*\varphi\in S_*(\alpha). \qquad (6)$$

我们很自然地要对亚纯单叶函数研究类似的问题．我们猜测有如下结果：

$$g(\zeta)\in\Sigma_*(\alpha),\ \varphi(z)\in K_0\Rightarrow 对\zeta\in\Delta,\ g(\zeta)*\zeta^2\varphi(\frac{1}{\zeta})\in\Sigma_*(\alpha). \qquad (7)$$

即，若$g(\zeta)=\zeta+\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^{-n}\in\Sigma_*(\alpha)$，$\varphi(z)=z+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{n+2}\in K_0$，则对$\zeta\in\Delta$，函数

$$\zeta+\sum_{n=1} b_n c_n\zeta^{-n}\in\Sigma_*(\alpha).$$

本文将证明当$\alpha=\frac{1}{2}$时该猜测为真．此外，本文还得到亚纯单叶性的一个充分条件．

§2 判 别 定 理

著名的Clunie-Jack引理[2]已成为单叶函数论中的一个常用工具．它实际上是经典的Julia引理的推论[3]、Ruscheweyh[3]将其推广为如下形式

引理1 设$\varphi\in\mathscr{A}$，且对于$0\le k\le n$有$\varphi^{(k)}(0)=0$．若对于某点$z_0\in D$，当$|z|\le|z_0|$时恒有$|\varphi(z)|\le|\varphi(z_0)|$，则$\kappa=\dfrac{z_0\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}$是实数且$\kappa\ge n+1$．(此处〔3〕中误为$\kappa\ge n$)

利用此引理，我们将给出Σ类函数的一个判别定理．为此要用到〔4〕中的如下结果：

引理2 设$\omega(z)\in\mathscr{A}$，且$|\omega'(z)|\le 1$，$z\in D$，则对$\zeta\in\Delta$，

$$g(\zeta)=\zeta+\omega(\frac{1}{\zeta})\in\Sigma. \qquad (8)$$

现在我们来建立Σ类函数的一个判别定理：

定理1 设$g(\zeta)\in\mathscr{B}_0$．若

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta g''(\zeta)}{g'(\zeta)^2}>-\frac{1}{2},\quad \zeta\in\Delta, \qquad (9)$$

则$g\in\Sigma$．

证 命

$$g(\zeta)=\zeta+\omega(\frac{1}{\zeta}),\quad \zeta\in\Delta, \qquad (10)$$

则对$z\in D$，$\omega(z)\in\mathscr{A}$，且

$$\omega'(z)=-\frac{1}{z^2}g'(\frac{1}{z})+\frac{1}{z^2} \qquad (11)$$

命

$$\varphi(z)=-z^2\omega'(z)=g'\left(\frac{1}{z}\right)-1,\quad z\in\mathrm{D}. \tag{12}$$

若在D中 $|\varphi(z)|<1$ 不成立，则必存在 $z_0\in\mathrm{D}$，使 $|\varphi(z_0)|=1$，且当 $|z|<|z_0|$ 时，$|\varphi(z)|<|\varphi(z_0)|$．由引理 1，有

$$\kappa=\frac{z_0\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\geq 2\;. \tag{13}$$

由（12）式，命 $\zeta_0=\frac{1}{z_0}$，则有

$$\zeta_0 g''(\zeta_0)=-z_0\varphi'(z_0),\quad g'(\zeta_0)=1+\varphi(z_0).$$

于是

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta_0 g''(\zeta_0)}{g'(\zeta_0)^2}=-\kappa\,\mathrm{Re}\frac{\varphi(z_0)}{[1+\varphi(z_0)]^2}\leq-\frac{\kappa}{4}\leq-\frac{1}{2}.$$

这与（9）式相违，故有 $|\varphi(z)|<1$，$z\in\mathrm{D}$．由Schwarz引理，可进而推出 $|\varphi(z)|\leq|z|^2$．即 $|\omega'(z)|\leq 1$，从且由引理 2，得出定理的结论．证毕．

§3 卷 积 定 理

现在证明猜测（7）对 $\alpha=\frac{1}{2}$ 成立．

考虑 $\mathscr{A}_1$ 的如下一些子集：

$$\mathrm{W}_\alpha=\{\varphi\in\mathscr{A}_1\,|\,\mathrm{Re}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\leq\frac{\alpha}{2},\ z\in\mathrm{D}\},$$

$$\mathrm{P}_0=\{p\in\mathscr{A}_1\,|\,\text{存在}\theta\in\mathbf{R}\text{使}\,\mathrm{Re}\,e^{i\theta}p(z)>0,\ z\in\mathrm{D}\},$$

$$\mathrm{G}_\beta=\{\varphi\cdot p\,|\,\varphi\in\mathrm{W}_{\beta-1},\ p\in\mathrm{P}_0\},$$

$$\mathrm{T}_\beta=\left\{\frac{(1+\varepsilon z)^{[\beta]}(1+\delta z)^{\{\beta\}}}{1-\sigma z}\,\Big|\,\varepsilon,\delta,\sigma\in\partial\mathrm{D}\right\},$$

其中 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 1$，$[\beta]$ 表示不超过 β 的最大整数，$\{\beta\}=\beta-[\beta]$．

我们需要一系列引理：

引理 3 $\mathrm{T}_\beta^*\subset\mathrm{G}_\beta^*$．

引理 4 设 φ，$\psi\in\mathscr{A}_1$，并且

$$\varphi(z)*\frac{1+\varepsilon z}{1-\sigma z}\psi(z)\neq 0,\ \text{对一切}\varepsilon,\sigma\in\partial\mathrm{D},\ z\in\mathrm{D}. \tag{14}$$

则对任何 $F\in\mathscr{A}$，有

$$\left(\frac{\varphi*F\psi}{\varphi*\psi}\right)(\mathrm{D})\subset\mathrm{co}F(\mathrm{D}), \tag{15}$$

其中 $\mathrm{co}F(\mathrm{D})$ 表示 $F(\mathrm{D})$ 的凸包．

上述两引理分别是〔1〕中定理1.2的特款和推论2.6，只是在叙述方式上略有改变．

引理 5 设 $h\in\mathscr{A}_1$，$h'(0)=0$．则 $h\in\mathrm{T}_2^*$ 的充要条件是 $h(\mathrm{D})\subset\Omega=\{u+iv\,|\,u,\ \in\mathbf{R},\ u>v^2+\frac{3}{4}\}$．

证明 命 $h(z)=1+\varphi(z)$，则

$$h*\frac{(1+\varepsilon z)^2}{1-\sigma z}=(1+\varphi)*\left[\frac{1}{1-\sigma z}+\frac{2\varepsilon}{\sigma}\frac{\sigma z}{1-\sigma z}-\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2 z^2}{1-\sigma z}\right]=1+\frac{(\varepsilon+\sigma)^2}{\sigma^2}\varphi(\sigma z)$$

故$h\in T_2^*\Leftrightarrow\varphi(z)=-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$，$\forall\varepsilon\in\partial D$，$z\in D$．即$h\in T_2^*\Leftrightarrow h(z)\neq 1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$，$\forall\varepsilon\in\partial D, z\in D$．而$w=u+iv=1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$，$\varepsilon=e^{i\theta}$，恰为$\Omega$的边界曲线，又因$h(0)=1\in\Omega$，故引理的结论成立．证毕．

引理 6 [7] 设$f\in S_*$，$\beta>0$，$\gamma\geq 0$，则

$$\Phi(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f^{\beta}(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}}\in S_*\,.$$

引理 7　设$f\in K_0$，则$\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{z^{1/2}}\int_0^{z^{1/2}}\frac{dt}{1-t^2}$．

这是〔6〕中推论 1 的一个特款．

引理 8　函数

$$F(z)=\frac{1}{z^{1/2}}\int_0^{z^{1/2}}\frac{dt}{1-t^2},\quad z\in D \tag{16}$$

在D内单叶解析，且$F(D)\subset\Omega=\{u+iv\,|\,u,v\in\mathbf{R},\ u>v^2+\frac{3}{4}\}$．

证明　因$f(z)=\frac{z}{1-z}\in S_*$，取$\beta=1$，$\gamma=\frac{1}{2}$，则由引理 6 得知

$$3[F(z)-1]=\frac{3}{z^{1/2}}\int_0^{z^{1/2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=\frac{3}{2z^{1/2}}\int_0^{z}\frac{t}{1-t}\cdot t^{-1/2}dt\in S_*,$$

故$F(z)$在D内解析单叶

又因函数

$$G(z)=F(z^2)=\frac{1}{2z}\log\frac{1+z}{1-z},\quad z\in D \tag{17}$$

与函数$F(z)$有相同的像域和边界曲线，且

$$G(\bar{z})=\overline{G(z)}\ ,\quad G(-z)=G(z).$$

故我们只要证明其边界曲线

$$w=\frac{1}{2e^{i\theta}}\log\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\ (\text{取}\log 1=0\text{的分枝}) \tag{18}$$

中对应于$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$的部分，记为C，在$\Omega$内部即可．此时，若命$\lambda i=\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$，则$\lambda\geq 1$．曲线C的参数方程可表为

$$\begin{cases} u=\mathrm{Re}\,w=\dfrac{1}{2(1+\lambda^2)}[(\lambda^2-1)\log\lambda+\pi\lambda], \\ v=\mathrm{Im}\,w=\dfrac{1}{4(1+\lambda^2)}[(\lambda^2-1)\pi-4\lambda\log\lambda], \end{cases}\quad \lambda\geq 1\,. \tag{19}$$

考虑函数

$$H(\lambda)=u-v^2-\frac{3}{4}, \tag{20}$$

经计算知当$\lambda \geq 1$时$H(\lambda)>0$．注意到$\lambda \geq 1$时，$v=\operatorname{Im} w \geq 0$，这表明曲线$C \subset \Omega$，于是$F(D) \subset \Omega$．证毕．

最后我们来建立本文的主要定理

定理 2 设$g(\zeta) \in \Sigma_*(\frac{1}{2})$，$\varphi(z) \in K_0$，则对$\zeta \in \Delta$有$g(\zeta) * \zeta^2 \varphi(\frac{1}{\zeta}) \in \Sigma_*(\frac{1}{2})$．

证明 (i) 设$\psi(z) \in W_a$，则对任意的$\varepsilon, \sigma \in \partial D$，有$\frac{1+\varepsilon z}{1-\sigma z}\psi(z) \in G_{1+a}$．若$h \in T^*_{1+a}$，则由引理 3 推出

$$h(z) * \frac{1+\varepsilon z}{1-\sigma z}\psi(z) \neq 0, \quad \forall \varepsilon, \sigma \in \partial D,\ z \in D.$$

取$F(z)=\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$并应用引理 4 得到

$$\operatorname{Re}\frac{h * z\psi'(z)}{h * \psi(z)} = \operatorname{Re}\frac{z(h*\psi)'}{h*\psi} \leq \frac{a}{2},$$

因而有$h * \psi \in W_a$．这就是说

$$W_a * T^*_{1+a} \subset W_a, \quad a \geq 0. \tag{21}$$

(ii) 显然

$$g \in \Sigma_*(a) \Leftrightarrow z g(\frac{1}{z}) \in W_{2-2a},\ z \in D, \quad 0 \leq a < 1. \tag{22}$$

由 (21) 式，对于$h \in T^*_{3-2a}$，$g \in \Sigma_*(a)$，有

$$h(z) * z g(\frac{1}{z}) \quad W_{2-2a}, \quad z \in D. \tag{23}$$

由 (22) 式，上式又可写成

$$g(\zeta) * \zeta h(\frac{1}{\zeta}) \in \Sigma_*(a), \quad \zeta \in \Delta. \tag{24}$$

(iii) 设$g(\zeta) \in \Sigma_*(\frac{1}{2})$．若$\varphi \in K_0$，则由引理 7，引理 8 及引理 5，$\frac{\varphi(z)}{z} \in T^*_2$．故由 (24) 式推出$g(\zeta) * \zeta^2 \varphi(\frac{1}{\zeta}) \in \Sigma_*(\frac{1}{2})$，$\zeta \in \Delta$．定理证毕．

推论 若$g(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \in \Sigma_*(\frac{1}{2})$，则

$$\tilde{g}(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} b_{2n-1}\zeta^{-(2n-1)} \in \Sigma_*(\frac{1}{2}).$$

证明 取$\varphi(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \in K_0$即得．

参 考 文 献

[1] Sheil-Small, T., The Hadamard product and linear transformations of classes of analytic functions, J.Analyse Math., 34(1978), 204—239.

[2] Jack, I.S., Functions starlike and convex of order α, J.London Math.Soc., (2) 3(1971), 469—474.

[3] Ruscheweyh, St., Neighborhoods of univalent functions, Proc.Amer.Math.Soc., 81(1981), 521—527.

[4] Krzyz, Jan G., Convolution and quasiconformal extension, Comment .Math.Helvetici. 51(1976), 99—104.

[5] Ruscheweyh, St.and Sheil—Small, T., Hadamard products for schlicht functions and Pólya-Schoenberg conjecture, Comment. Math. Helvetici. 48(1973), 119—135.

[6] Hallenbeck, D.J. and Ruscheweyh, St., Subordination by convex functions, Proc.Amer. Math. Soc., 52(1972), 191—195.

[7] Miller, S.S., Mocanu, P.T. and Reade, M.O., Starlike integral operators, Pacific J.Math., 79(1978), 157—168.

[8] Ruscheweyh, St., Duality for Hadamard products with applications to extermal problems for functions regular in the disc, Trans.Amer.Math.Soc., 210(1975), 63—71.

[9] Hamilton, D.H.and Tuan, P.D., Radius of starlikeness of convex combinations of univalent starlike functions, Proc.Amer.Math.Soc., 78(1980), 56—58.

[10] Sheil-Small, T., Applications of the Hadamard Product, Aspects of Contemporary Complex Analysis, Academic Press Inc.(London), 1980, 515—523.