连续参数随机过程的最优停止问题*

薛　行　鸿
（华东师范大学）

设$\mathbf{X}=(X_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\geq 0)$为一个右连续随机过程．本文在$V_0<\infty$和$E\underline{\lim_t}(X_t^-)<\infty$的条件下，给出了最优停时的特征，证明了$\mathbf{X}$的Snell包是右连续$\mathscr{T}^*$-正则上鞅和控制$\mathbf{X}$的最小正则上鞅．在最优停时存在时，给出了最优停时为唯一的充要条件．此外，将〔1〕中的条件$E\sup_t(X_t^-)<\infty$减弱为$E\underline{\lim_t}(X_t^-)<\infty$后，得到了相应的结果．

§1　引　　言

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一个完备的概率空间，$\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t,\ t\geq 0)$为满足通常条件的$\sigma$域流，$\mathbf{X}=(X_t,\ t\geq 0)$是关于$\mathbf{F}$的适应过程．以下还设$\mathbf{X}$的几乎所有轨道右连续，并记$X_\infty=\overline{\lim_t}X_t$，$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_t\mathscr{F}_t$．关于$\mathbf{F}$的停时全体记为$\mathscr{T}^*$；$a.s.$有限的停时（简称停止规则）全体记为$\mathscr{T}$．对$t\geq 0$，令$C_t^*=\{\tau\in\mathscr{T}^*:\ \tau\geq t$且$EX_\tau^-<\infty\}$，$C_t=C_t^*\cap\mathscr{T}$，$V_t^*=\sup\limits_{\tau\in C_t^*}EX_\tau$，$V_t=\sup\limits_{\tau\in C_t}EX_\tau$，$\gamma_t^*=\mathrm{ess}\sup\limits_{\tau\in C_t^*}E(X_\tau\mid\mathscr{F}_t)$，$\gamma_t=\mathrm{ess}\sup\limits_{\tau\in C}E(X_\tau\mid\mathscr{F}_t)$（我们假定$C_t$总是非空的）．$\Gamma=(\gamma_t,\ t\geq 0)$通常称为$\mathbf{X}$的Snell包．如果存在$\tau\in C_t^*(C_t)$，使有$EX_\tau=V_t$（下面将证明$V_t^*=V_t$），则称$\tau$为$\mathbf{X}$在$C_t^*(C_t)$中的最优停时（最优停止规则）．对$\varepsilon>0$，若有$\tau\in C_t$，$EX_\tau\geq V_t-\varepsilon$，则称$\tau$为$\mathbf{X}$在$C_t$中的$\varepsilon$-最优停止规则．Факеев〔1〕用Snell〔2〕方法研究了具有连续参数的随机过程的最优停止问题，在较强的控制条件下推广了离散参数时〔2〕、〔3〕(也见〔4〕)中的结果（〔1〕中定理3的证明是错误的）．〔5〕在存在控制$\mathbf{X}$的最小$\mathscr{T}$-正则上鞅的假定下，考虑了最优停时问题．本文证明了当$V_0<\infty$和$EX_\infty^-<\infty$时Γ是控制$\mathbf{X}$的最小$\mathscr{T}$-正则上鞅且是右连续$\mathscr{T}^*$-正则上鞅，并给出了最优停时的特征；在最优停时存在时，给出了最优停时为唯一的充要条件；将〔1〕中的条件$E\sup_t X_t^-<\infty$减弱为$EX_\infty^-<\infty$后，得到了相应的结果．

§2　Snell包的若干性质

Snell包在离散参数最优停止问题的研究中所起的作用是周知的．本节给出连续参数时Snell包的若干性质．

对$b>0$，记$\mathbf{X}^b=(X_t\vee b,\ t\geq 0)$．相应于$\mathbf{X}^b$的$\gamma_t^*$、$\gamma_t$等分别记为$\gamma_t^{*b}$、$\gamma_t^b$等．仿照〔4〕引理4.12的证明可得

引理1　在上述记号下，当b↑时，$\gamma_t^{*b}\uparrow\gamma_t^*a.s.$，$\gamma_t^b\uparrow\gamma_t a.s.$，$V_t^{*b}\uparrow V_t^*$，$V_t^b\uparrow V_t$．

定理1　任给$t\geq 0$，$E\gamma_t=V_t=V_t^*$，$\gamma_t=\gamma_t^*a.s.$．

证　由引理1，可设存在$b>0$，$X_t\leq b$对一切$t\geq 0$成立．由〔4〕定理1.5，可取$(\tau_k)\subset$

* 1982年12月7日收到．

C_t，$\gamma_t=\sup\limits_k E(X_{\tau_k}\mid\mathscr{F}_t)\ a.s.$．令$\sigma_1=\tau_1$，$\sigma_{k+1}=\sigma_k I_{(E(X_{\sigma_k}\mid\mathscr{F}_t)\geq E(X_{\tau_{k+1}}\mid\mathscr{F}_t))}+\tau_{k+1}I_{(E(X_{\sigma_k}\mid\mathscr{F}_t)<E(X_{\tau_{k+1}}\mid\mathscr{F}_t))}$，则$R\uparrow\infty$时，$E(X_{\sigma_1}\mid\mathscr{F}_t)\leq E(X_{\sigma_k}\mid\mathscr{F}_t)\uparrow\gamma_t$，由单调收敛定理即得$E\gamma_t=\lim\limits_k EX_{\sigma_k}\leq\sup\limits_{\tau\in C_t}EX_\tau=V_t\leq E[\operatorname{ess}\sup\limits_{\tau\in C_t}E(X_\tau\mid\mathscr{F}_t)]=E\gamma_t$．同理可得$E\gamma_t^*=V_t$．

任给$\varepsilon>0$和$\tau\in C_t^*$，令$\tau(\varepsilon)=\inf\{s\geq t:\ X_s\geq E(X_\tau\mid\mathscr{F}_s)-\varepsilon\}$．因$\mathbf{F}$右连续，$\mathbf{X}$的几乎所有轨道右连续，故$\tau(\varepsilon)\in C_t^*$且$\tau(\varepsilon)\leq\tau\ a.s.$．由鞅收敛定理，$\lim\limits_{s\to\infty}E(X_\tau\mid\mathscr{F}_s)=E(X_\tau\mid\mathscr{F}_\infty)=X_\tau\ a.s.$，故在$(\tau(\varepsilon)=\infty)$上

$$-\infty>\lim_{s\to\infty}E(X_\tau\mid\mathscr{F}_s)-\varepsilon=X_\tau-\varepsilon=X_\infty-\varepsilon<\infty\quad a.s.,$$

因此$P(\tau(\varepsilon)=\infty)=0$，$\tau(\varepsilon)\in C_t$且$EX_{\tau(\varepsilon)}\geq EX_\tau-\varepsilon$．因$\varepsilon>0$和$\tau\in C_t^*$均是任意的，故$V_t\geq V_t^*$．但显然有$V_t\leq V_t^*$，定理1证毕．

注1　〔1〕在$E\sup\limits_t(X_t)<\infty$的限制下得到$\gamma_t=\gamma_t^*$，（〔1〕定理3），但是其证明是无效效的．（容易举出例子说明其证明中的离散化序列$(X_t(n),\ t\geq0)$的$X_\infty(n)=\overline{\lim\limits_t}X_t(n)$一般与$X_\infty$是不相等的，因此整个证明无法通过）．

定义1　称适应过程$\mathbf{Y}=(Y_t,\ t\geq0)$是广义上鞅，如果对任意的$0\leq s<t$，$EY_t^-<\infty$且$E(Y_t\mid\mathscr{F}_s)\leq Y_s\ a.s.$；右连续的广义上鞅$\mathbf{Y}$称为$\mathscr{T}$-($\mathscr{T}^*$-)正则的，若任给$\tau_1\leq\tau_2\in\mathscr{T}(\mathscr{T}^*)$，$EY_{\tau_2}$存在且$E(Y_{\tau_2}\mid\mathscr{F}_{\tau_1})\leq Y_{\tau_1}\ a.s.$．

由定理1证明容易看出$\mathbf{\Gamma}$是广义上鞅．

引理2　如果$EX_\infty^-<\infty$，则$\mathbf{\Gamma}$有右连续适应修正．

证　由引理1和〔6〕vi.18，可设$E\sup\limits_t X_t^+<\infty$．由〔7〕定理3.8，以下只需证$E\gamma_t=V_t$右连续．$\forall t\geq0$和$\varepsilon>0$，取$\tau\in C_t$，$EX_\tau\geq V_t-\varepsilon$．令$\tau^{(n)}(w)=i/2^n$,如果$t+(i-1)/2^n\leq\tau(w)<t+i/2^n$，$i\geq1$，则$\tau^{(n)}\in\mathscr{T}$，$\tau^{(n)}\downarrow\tau(n\uparrow\infty)$．因$EX_\infty^-<\infty$，由定理1，$\gamma_{\tau(n)}^-=\gamma_{\tau(n)}^{*-}\leq[E(X_\infty\mid\mathscr{F}_{\tau(n)})]^-\leq E(X_\infty^-\mid\mathscr{F}_{\tau(n)})\ a.s.$,因而$E\gamma_{\tau(n)}>-\infty$，故$\gamma_{\tau(n)}$可积，$(\gamma_{\tau(n)},\ \mathscr{F}_{\tau(n)},\ n\geq1)$是反向上鞅，且$\lim\limits_n E\gamma_{\tau(n)}\leq E\sup X_t^+<\infty$．由〔7〕定理2.12，$(\gamma_{\tau(n)},\ n\geq1)$一致可积，且$\gamma_{\tau(n)}\ a.s.$收敛于可积随机变量$\xi$．因$\mathbf{X}$的几乎所有轨道右连续，故$\lim\limits_n X_{\tau(n)}=X_\tau\ a.s.$，于是$\xi=\lim\limits_n\gamma_{\tau(n)}\geq\lim\limits_n X_{\tau(n)}=X_\tau\ a.s.$．取充分大的$N$，使$E\gamma_{\tau(N)}\geq E\xi-\varepsilon$，则当$0<\delta<1/2^N$时，对离散参数上鞅$(\gamma_{t+\delta},\ \gamma_{t+i/2^N},\ i\geq1)$应用〔7〕定理2.29和2.27（注意到$\gamma_s^-\leq E(X_\infty^-\mid\mathscr{F}_s)\ a.s.$，$s\geq0$），有$E\gamma_{t+\delta}\geq E\gamma_{\tau(N)}\geq E\xi-\varepsilon\geq EX_\tau-\varepsilon\geq V_t-2\varepsilon$．因$\varepsilon>0$是任意的，$V_t$是单调下降函数，所以$V_t=E\gamma_t$右连续．

由引理2，当$EX_\infty^-<\infty$时可认为$\mathbf{X}$的Snell包$\mathbf{\Gamma}$右连续．

定义2　如果有P-零集N，使得对所有的$t\geq0$和$w\in N^c$，有$Y_t(w)\geq X_t(w)$，则称$\mathbf{Y}=(Y_t,\ t\geq0)$控制了$\mathbf{X}=(X_t,\ t\geq0)$，记作$\mathbf{Y}\geq\mathbf{X}$．

定理2　如果$EX_\infty^-<\infty$，则$\mathbf{X}$的Snell包$\mathbf{\Gamma}$是控制$\mathbf{X}$的最小右连续$\mathscr{T}^*$-正则上鞅．若$\mathbf{X}$还满足$V_0<\infty$，则$\mathbf{\Gamma}$是控制$\mathbf{X}$的最小$\mathscr{T}$-正则上鞅．

证　由定理1，$\gamma_t^-\leq E(X_\infty^-\mid\mathscr{F}_t)\ a.s.$，故$(\gamma_t+E(X_\infty^-\mid\mathscr{F}_t),\ t\geq0)$是非负广义上鞅，由引理1、〔7〕定理3.10和3.21可得$(\gamma_t,\ t\geq0)$是$\mathscr{T}^*$-正则上鞅．显然$\mathbf{\Gamma}\geq\mathbf{X}$．若另有右连续$\mathscr{T}^*$-正则上鞅$\mathbf{Y}\geq\mathbf{X}$，则$\forall t\geq0$、$\tau\in C_t$，$Y_t\geq E(Y_\tau\mid\mathscr{F}_t)\geq E(X_\tau\mid\mathscr{F}_t)\ a.s.$,因而$Y_t\geq\gamma_t\ a.s.$．因$\mathbf{\Gamma}$和$\mathbf{Y}$均右连续，故$\mathbf{\Gamma}\leq\mathbf{Y}$，$\mathbf{\Gamma}$是控制$\mathbf{X}$的最小右连续$\mathscr{T}^*$-正则上鞅．由〔7〕定理5.32和〔8〕定理7，以下只需证当$V_0<\infty$和$EX_\infty^-<\infty$时，$\forall\tau\in\mathscr{T}$，$EX_\tau$存在且有$\tau\leq\tau'\in\mathscr{T}$，$EX_{\tau'}^-<\infty$．倘有$\tau\in\mathscr{T}$，$EX_\tau$不存在，即$EX_\tau^+=EX_\tau^-=+\infty$，令$\tau^*=\tau I_{(X_\tau\geq0)}+\infty I_{(X_\tau<0)}$，则$\tau^*\in\mathscr{T}^*$，$V_0=$

$V_0^* \geq EX_\tau = +\infty$，引出矛盾，故 $\forall \tau \in \mathscr{T}$，$EX_\tau$存在．令$\tau' = \inf\{t: t \geq \tau$且$X_t \geq E(X_\infty | \mathscr{F}_t) - 1\}$，因 $-\infty < EX_\infty \leq V_0 < \infty$，F右连续，X的几乎所有轨道右连续，故$\lim\limits_t E(X_\infty | \mathscr{F}_t) = X_\infty\ a.s.$．$\tau \leq \tau' \in \mathscr{T}$且$EX_{\tau'} \geq EX_\infty - 1 > -\infty$．

注 2 〔1〕在$E\sup\limits_t(X_t^-) < \infty$的条件下得到定理 2 的前一部分结果．

§ 3 最优停时和ε-最优停止规则

对$t \geq 0$、$\varepsilon \geq 0$令$\tau_t(\varepsilon) = \inf\{s > t: X_s \geq y_s - \varepsilon\}$，$\sigma_t(\varepsilon) = \inf\{s \geq t: X_s \geq y_s - \varepsilon\}$，$(\inf\{\phi\} = \infty)$．

定义 3 如果存在非负可积随机变量ξ，使得右连续鞅$(E[\xi | \mathscr{F}_t),\ t \geq 0)$控制X，则称X满足条件A．

定理 3 设X满足条件A且$EX_\infty^- < \infty$，则对$t \geq 0$，$\varepsilon > 0$，$\sigma_t(\varepsilon)$和$\tau_t(\varepsilon)$均是X在C_t中的ε-最优停止规则．

证 由定理 2 和〔5〕推论7.1即得$\sigma_t(\varepsilon)$是X在C_t中的ε-最优停止规则．易见$s \downarrow t$时$\sigma_s(\varepsilon) \downarrow \tau_t(\varepsilon)$，于是由$(V_s\ \ s \geq 0)$的右连续性和条件A下$(X^-_{\sigma_t(\varepsilon)},\ s \geq t)$的一致可积性，

$$EX_{\tau_t(\varepsilon)} = E\lim_{s \downarrow t} X_{\sigma_s(\varepsilon)} \geq \varlimsup_{s \downarrow t} EX_{\sigma_s(\varepsilon)} \geq \lim_{s \downarrow t} V_s - \varepsilon = V_t - \varepsilon,$$

$\tau_t(\varepsilon)$亦是X在C_t中的ε-最优停止规则．

定义 4 称右连续过程Y为从左拟上半连续，如果任给$\tau \in \mathscr{T}^*$及$(\tau_n) \subset C_0$，$\tau_n \uparrow \tau$，有$I_{(\tau < \infty)} \varlimsup\limits_n Y_{\tau_n} \leq I_{(\tau < \infty)} Y_\tau\ a.s.$．

以下记$y_\infty = \varlimsup\limits_t y_t$．

定理 4 设X满足条件A，$EX_\infty^- < \infty$且X从左拟上半连续，则$\sigma_t(0)$和$\tau_t(0)$均是X在C_t^*中的最优停时．

由定理 3，$\lim\limits_n EX_{\sigma_t(\frac{1}{n})} = V_t$．显然$\sigma_t(1/n)$随$n$单调上升，设其极限为$\sigma'$，则$\sigma' \in \mathscr{T}^*$，且$t \leq \sigma' \leq \sigma_t(0)$(因$\sigma_t(1/n) \leq \sigma_t(0)$)．由定理条件，应用定理 2 可得

$$Ey_{\sigma'} \leq Ey_t = V_t = \lim_n EX_{\sigma_t(1/n)} \leq E\varlimsup_n X_{\sigma_t(1/n)} \leq$$

$$E[I_{(\sigma' < \infty)} X_{\sigma'} + \varlimsup_t \urcorner_{(\sigma' < \infty)} X_t] = EX_{\sigma'} \leq Ey_{\sigma'}.$$

故$Ey_{\sigma'} = EX_{\sigma'} = V_t$，$X_{\sigma'} = y_{\sigma'}\ a.s.$．再由$\sigma_t(0)$的定义及$\sigma_t(0) \geq \sigma' \geq t$，即得$\sigma_t(0) = \sigma'\ a.s.$，$\sigma_t(0)$是X在$C_t^*$中的最优停时．

易见$\sigma_s(0) \downarrow \tau_t(0)\ (s \downarrow t)$，于是由$\Gamma$和$(V_s)$的右连续性及条件A下$X_\infty = y_\infty\ \ a.s.$（见〔8〕定理7），$EX_{\tau_t(0)} = Ey_{\tau_t(0)} = E\lim\limits_{s \downarrow t} y_{\sigma_s(0)} \geq \lim\limits_{s \downarrow t} Ey_{\sigma_s(0)} = \lim\limits_{s \downarrow t} V_s = V_t$，$\tau_t(0)$亦是X在$C_t^*$中的最优停时．

注 3 〔1〕在$E\sup\limits_t |X_t| < \infty$这一较强的控制条件下得到定理 3 和 4 的结果．〔5〕在存在控制X的最小$\mathscr{T}$-正则上鞅的假定下，讨论了C_t^*中的ε-最优停止规则和最优停时．

§ 4 最优停时的特征和唯一性

定理 5 设X满足：$EX_\infty^- < \infty$和$V_t < \infty$，τ是停时（停止规则），则以下性质等价：

(i) τ是X在C_t^*中的最优停时（最优停止规则）；

(ii) $X_\tau = y_\tau\ a.s.$且$(y_{\tau \wedge s},\ t \leq s \leq \infty)$是封闭鞅；

(iii) $X_\tau = y_\tau\ a.s.$且$(y_{\tau \wedge s},\ t \leq s \leq \infty)$是封闭下鞅；

(iv) $\sigma_t(0)$ 是**X**在$C_t^*(C_t)$中的最小最优停时（最优停止规则）且$I_{(\tau>\sigma_t(0))}E(X_\tau|\mathscr{F}_{\sigma_t(0)})=I_{(\tau>\sigma_t(0))}X_{\sigma_t(0)}$ $a.s.$，$\tau\geq\sigma_t(0)$ $a.s.$。

证 由定理2，Γ是控制**X**的右连续$\mathscr{F}^*$-正则上鞅。(i) 成立时，$-\infty<V_t=EX_\tau\leq Ey_\tau\leq Ey_t=V_t<\infty$，故$X_\tau=y_\tau$ $a.s.$。任给$s\geq t$，$V_t=EX_\tau=Ey_\tau=E[E(y_\tau|\mathscr{F}_s)]\leq y_{\tau\wedge s}\leq Ey_t=V_t$，因而$E(y_\tau|\mathscr{F}_s)=y_{\tau\wedge s}$ $a.s.$，于是由$|Ey_\tau|=|EX_\tau|=|V_t|<\infty$，(ii) 成立。(ii)⇒(iii) 为显然。由〔7〕定理3.21 (iii)⇒(i)。现设 (ii) 成立。由$\sigma_t(0)$的定义，$\sigma_t(0)\leq\tau a.s.$且$I_{(\tau>\sigma_t(0))}E(X_\tau|\mathscr{F}_{\sigma_t(0)})=I_{(\tau>\sigma_t(0))}E(y_\tau|\mathscr{F}_{\sigma_t(0)})=I_{\tau>\sigma_t(0))}y_{\sigma_t(0)}a.s.$，因 (i)⇔(ii)，故$EX_\tau=V_t$且

$$EX_{\sigma_t(0)}=E[I_{(\tau>\sigma_t(0))}E(X_\tau|\mathscr{F}_{\sigma_t(0)})+I_{(\tau=\sigma_t(0))}X_\tau]=EX_\tau=V_t \qquad (*)$$

因此$\sigma_t(0)$是**X**在C_t^*的最小最优停时（最优停止规则），(iv) 成立。当 (iv) 成立时，(*) 式成立，因此 (i) 成立

由定理5即可得

定理6 设$EX_\infty^-<\infty$，$V_t<\infty$，则**X**中最优停时存在时，最优停时为唯一（$=\sigma_t(0)$）的充要条件是：任给$\sigma_t(0)\leq\tau\in C_t^*$，

$$P[(\tau>\sigma_t(0))(E(X_\tau|\mathscr{F}_{\sigma_t(0)})=X_{\sigma_t(0)})]=0.$$

定理7 设**X**是可积过程。若有$\tau\in C_t^*$，$EX_\tau=\infty$，则X在C_t^*中最优停时为唯一（$=\tau a.s.$）的充要条件是：任给$s\geq t$，$\mathscr{F}_s$只包含Ω、ϕ和P-零集。此时$\tau=\infty$ $a.s.$。

证 设τ是**X**在C_t^*中的唯一的最优停时，因**X**是可积过程，$V_t=\infty$，易证对任意的$s>t$，$P(\tau\leq s)=0$，故$\tau=\infty a.s.$。倘有$s_0\geq t$和$A\in\mathscr{F}_s$。使得$0<P(A)<1$，不妨设$EI_AX_\tau=\infty$。令$\delta=s_0I_{A^c}+\tau I_A$，则$\delta\in C_t^*$，$P(\delta\neq\tau)>0$，$EX_\delta=\infty$，引出矛盾，故必要性成立。现证充分性。设任给$s\geq t$，$\mathscr{F}_s$只包含Ω、$\phi$及$P$零集，则对任意的$\delta\in C_t^*$，$\delta$必以概率1取到一个值。事实上，若$\delta\in C_t^*$，$P(\delta=\infty)<1$，令$s_0=\inf\{s\geq t:\ P(\delta\leq s)=1\}$，$A_n=(s_0-1/n<\delta<s_0+1/n)$，则$P(A_n)=1$，$P(\delta=s_0)=P(\bigcap_n A_n)=1$。因**X**是可积过程，唯有$\tau=\infty$ $a.s.$可使$EX_\tau=\infty$，故**X**在C_t^*中有唯一的最优停时∞。

参 考 文 献

〔2〕Факеев А.Г.,（Об оптимальной остановке случайных процессов с непрерывным временем, Теория вероятн и ее примен., XV, 2,336—334,1970.

〔2〕Snell,J.L., Applications of martingale system theorems, Trans.Amer.Math.Soc.73,293—312,1952..

〔3〕Siegmund,D., Some problems in the therry of optimal stopping rules, Ann.Math.Statistics 38, 1627—1640,1967.

〔4〕Chow,Y.S., Robbins,H.and Siegmund,D., 最优停止理论（中译本），何声武、汪振鹏译.

〔5〕Thompson, M.E., Continuous parameter optimal stopping problems, Z.W.19,302—318,1971.

〔6〕Dellacherie,C., Meyer,P.A., Probabilites et Potentiels, 2e édition, Hermann 1980.

〔7〕严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1980.

〔8〕Mertens,J.F., Sur la theorte des martingales, C.R.Acad.Sci.Paris, 268,552—554,1969.