关于拓扑空间中的几个可测选择定理*

陈绍仲 古福文
（成都科技大学）

引言：1965年 Kuratowski-C和 Ryll—Nardzewski〔1〕首次得到了关于多值可测映射的可测选择的一个定理，他们讨论的值域空间是完备可分的度量空间。后来 Maitra〔2〕及 wagner〔3〕等对这个定理作了各种推广．但他们都假定值域空间是度量空间．本文的目的是要在比度量空间更广泛的值域空间中来讨论可测选择定理。Graf, S．在〔4〕和〔5〕中对值域空间是正则 Hausdorff 空间、每点的象是紧集的多值可测映射讨论了可测（弱）选择定理．他在定义域空间 $(\Omega, \mathfrak{a})$ 上赋上了拓扑u和一个完备有限的测度μ，并要求 $(\Omega, \mathfrak{a}, \mu)$ 上具有一个 strong lifting，我们对 $(\Omega, \mathfrak{a})$ 没这种要求；Graf,S．仅讨论闭集的逆象为可测集这种意义下的可测多值映射，而我们考虑了闭集的逆象为可测集和开集的逆象为可测集这两种多值可测映射；我们的方法与他不同。我们在一类比度量空间更广泛的拓扑空间内，对每点的象是闭子集的多值可测映射得到了两个可测选择定理，同时证明了一类多值可测映射可表示为它的可列多个可测选择的闭包。我们还证明了一类概率度量空间属于我们所讨论的值域空间。最后我们把可测选择定理用于形如 $\max\limits_{s\cdot t\ x\in F(\omega)} \varphi(\omega, x)$ 的随机规划，得到了$V(\omega)=\sup\{\varphi(\omega,x)\,|\,x\in F(\omega)\}$是可测函数，进而证明了一类随机规划存在有可测解。

本文用 $(X, \mathscr{T})$ 表拓扑空间，$(\Omega, \mathfrak{a})$ 表可测空间，R 表全体实数集，(R, d) 表数直线，N表全体自然数集，$p(X)=\{A|A\subset X\}$．$p^*(X)=\{A\,|A\subset X\wedge A\neq\phi\}$，$K^*(X)=\{A\,|A\in p^*(X)\wedge A$紧闭$\}$．

§1．主要结果

我们将在这节证明本文的主要定理．

定义1.1 （〔6,P.54〕）设 $F:\Omega\to p(X)$．若任给$O\in\mathscr{T}$有$F^{-1}(O)\in\mathfrak{a}$则称F弱可测；若任给闭集$D\subset X$有$F^{-1}(D)\in\mathfrak{a}$则称F可测．

又设$F:\Omega\to p^*(X)$，若存在可测单值映射$f:\Omega\to X$使得任给$\omega\in\Omega$有$f(\omega)\in F(\omega)$则称f为F的可测选择．

定义1.2 设$F:\Omega\to p^*(X)$，若存在可列集$Z\subset X$，使得任给$\omega\in\Omega$有$\overline{F(\omega)\cap Z}=F(\omega)$则称$F$是可分的．Z称为$F$的可分算子．

显然，若任给$\omega\in\Omega$，$\mathrm{int}\,F(\omega)\neq\phi$且$F(\omega)=\overline{\mathrm{int}\,F(\omega)}$，$(X, \mathscr{T})$是可分空间则$F$可分．

* 1983年12月13日收到．

定义1.3 若任给$x\in X$，存在可列多个开集$\{O_k|k\in N\}$使得$\{x\}=\bigcap\limits_{k\in N}O_k$，且任给$k\in N$存在$U_k\in\mathscr{T}$使得$x\in U_k\subset\overline{U}_k\subset O_k$则称$(X,\mathscr{T})$是单-$G_\delta$型的．

下面我们叙述本文的主要定理．

定理1.1 设$(X,\mathscr{T})$是单-G_δ型的，$F:\Omega\to K^*(X)$弱可测，且存在可列集Z使得$F^{-1}(Z)=\Omega$，则F有可测选择．

定理1.2 设$(X,\mathscr{T})$是T_1空间，$F:\Omega\to p^*(X)$可测，且存在可列集Z使得$F^{-1}(Z)=\Omega$，则F有可测选择．

由定义1.2容易看出，若F可分则上面定理中的条件$F^{-1}(Z)=\Omega$满足．

定理1.3 设$(X,\mathscr{T})$是单-G_δ型的，$F:\Omega\to(K^*(Z)$可分（Z为其可分算子），弱可测，则存在F的可列多个可测选择$\{f_n|n\in N\}$，使得任给$\omega\in\Omega$有$F(\omega)=\overline{\{f_1(\omega)\cdots f_n(\omega)\cdots\}}$．

在证明上面的定理前，先证几个引理．

引理1.1 设$F:\Omega\to p^*(X)$，存在可列集Z，$F^{-1}(Z)=\Omega$，且任给$z\in Z$有$F^{-1}(z)\in\mathfrak{a}$则F存在有可测选择．

证明． 令$B_i=F^{-1}(z_i)-\bigcup\limits_{j=0}^{i-1}F^{-1}(z_j)$ $(F^{-1}(z_0)\hat{=}\phi)$，由已知有$\{B_i|i\in N\}$是Ω的分割．

任给$\omega\in B_i$，定义$f(\omega)=z_i$，显然$f(\omega)\in F(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$．又任给$D\in\mathscr{T}$有$\{\omega:f(\omega)\in D\}=\bigcup\limits_{i\in N}\{\omega:f(\omega)\in D\}\cap B_i=\bigcup\limits_{i\in\{i\in N\wedge z_i\in D\}}B_i\in\mathfrak{a}$，故$f$可测，因而$f$即是$F$的可测选择．

引理1.2． 设$(X,\mathscr{T})$是单-G_δ型的，$F:\Omega\to K^*(X)$弱可测，则任给$x\in X$，有$F^{-1}(x)\in\mathfrak{a}$．

证明：由$(X,\mathscr{T})$的定义有$\{x\}=\bigcap\limits_{k\in N}O_k=\bigcap\limits_{k\in N}U_k=\bigcap\limits_{k\in N}\overline{U}_k$ $(O_k\in\mathscr{T},\ U_k\in\mathscr{T})$．

下证
$$F^{-1}(x)=\bigcap_{m\in N}F^{-1}(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_m)\qquad(1)$$

因$F^{-1}(x)=F^{-1}(\bigcap U_k)$，所以(1)的左边$\subset$右边．又任给$\omega\in$右边，有$F(\omega)\cap U_1\cap\cdots\cap U_m\neq\phi(m\in N)$，因而$A_m\hat{=}F(\omega)\cap\overline{U}_1\cap\cdots\cap\overline{U}_m\neq\phi$，则$\{A_m|m\in N\}$是一紧、闭、非空序列，且$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$．故$\bigcap\limits_{m\in N}A_m\neq\phi$（〔7，p.125；定理1〕）．但$\bigcap\limits_{m\in N}A_m=F(\omega)\cap\{x\}\Rightarrow x\in F(\omega)\Rightarrow\omega\in$左边$\Rightarrow$(1)成立．

而$F^{-1}(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_m)\in\mathfrak{a}$，所以$F^{-1}(x)\in\mathfrak{a}$．

引理1.3 若$F:\Omega\to p(X)$弱可测，则$\overline{F}:\Omega\to p(X)$ $(\overline{F}(\omega)\hat{=}\overline{F(\omega)})$弱可测，且任给$O\in\mathscr{T}$有$\overline{F}^{-1}(O)=F^{-1}(O)$．

证明． 任给$O\in\mathscr{T}$，只需让$\overline{F}^{-1}(O)=F^{-1}(O)$　（2）

显然（1）的左边$\supset$右边，又任给$\omega\in$左边，有$\overline{F}(\omega)\cap O=\overline{F(\omega)}\cap O\neq\phi$，因O是开集，易证$\overline{F(\omega)}\cap O\subset\overline{F(\omega)\cap O}$，从而$F(\omega)\cap O\neq\phi\Rightarrow\omega\in$右边$\Rightarrow$（2）成立．引理得证．

下面我们来证明前面的三个定理．

定理1.1的证明：由引理1.2和引理1.1知定理1.1成立．

定理1.2的证明：由〔8，p.147；定理1.2〕知任给$x\in X$，$\{x\}$闭于X，从而

$F^{-1}(x)\in\mathbf{a}$. 由引理1.1知定理成立.

定理1.3 的证明: 任给$z_i\in\mathbf{Z}$, 设 $\{z_i\}=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}O_i^k=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{U_i^k}$, O_i^k, $U_i^k\in\mathscr{T}$, $O_i^k\supset\overline{U_i^k}\supset U_i^k$ (见定义1.2和定义1.3).

令$V_i^k=\bigcap_{1\le j\le k}U_i^j$ $(k\in\mathbf{N})$, 则 $\{V_i^k|k\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{T}$, $V_i^1\supset V_i^2\supset V_i^3\supset\cdots$, 且 $\{z_i\}=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}V_i^k$.

又令$A_i^k=\{\omega\,|F(\omega)\cap V_i^k\ne\phi\}\in\mathbf{a}$, $(i,k\in\mathbf{N})$. 定义$G_i^k(\omega)=\begin{cases}F(\omega)\cap V_i^k & \omega\in A_i^k\\ F(\omega) & \omega\in\Omega-A_i^k\end{cases}$

由引理1.3和F的可分性易证$\overline{G_i^k}$ 满足定理1.1的条件, 因而存在可测选择f_i^k, 使得任给$\omega\in\Omega$ 有

$$f_i^k(\omega)\in\overline{G_i^k}(\omega)\subset F(\omega). \tag{3}$$

下证$F(\omega)=\overline{\{f_i^k(\omega)|i,k\in\mathbf{N}\}}$, 从而完成定理的证明.

对任意取定的$\omega\in\Omega$, 任取$z_n\in F(\omega)\cap\mathbf{Z}$, 有 $\{z_n\}=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}V_n^k$, 因为$z_n\in F(\omega)\cap V_n^k$ $(k\in\mathbf{N})$, 所以$\omega\in A_n^k=\{\omega: F(\omega)\cap V_n^k\ne\phi\}\Rightarrow G_n^k(\omega)=F(\omega)\cap V_n^k$.

设$f_n^k(\omega)=z_n^k\in\overline{G_n^k}(\omega)\subset F(\omega)$. 因 $\{\overline{G_n^k}(\omega)|k\in\mathbf{N}\}$ 紧、闭、非空且$\overline{G_n^1}(\omega)\supset\overline{G_n^2}(\omega)\supset\cdots$, 所以 $\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{G_n^k}(\omega)\ne\phi$ ([7, p. 125; 定理1]). 而$\overline{G_n^k}(\omega)=\overline{F(\omega)\cap V_n^k}\subset\overline{F(\omega)}\cap\overline{V_n^k}\subset F(\omega)\cap O_n^k\Rightarrow\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{G_n^k}(\omega)\subset\bigcap_{k\in\mathbf{N}}(F(\omega)\cap O_n^k)=F(\omega)\cap\{z_n\}$, 故$\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{G_n^k}(\omega)=\{z_n\}$.

因为 $\{z_n^k|k\in\mathbf{N}\}\subset F(\omega)$, $F(\omega)$ 紧、闭, 所以存在一个收敛于$F(\omega)$内某点P的子序列 $\{z_n^{k_m}|k_m\in\mathbf{N}_1\subset\mathbf{N}\}$ ([7, p. 126; 定理2]). 容易证明$P\in\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{G_n^k}(\omega)=\{z_n\}$, 则$P=z_n\Rightarrow$ $z_n\in\overline{\{z_n^{k_m}|k_m\in\mathbf{N}_1\}}\subset\overline{\{z_n^k\,|k\in\mathbf{N}\}}=\overline{\{f_n^k(\omega)\ |k\in\mathbf{N}\}}\subset\overline{\{f_m^k(\omega)\ |k,m\in\mathbf{N}\}}\Rightarrow F(\omega)\cap\mathbf{Z}\subset$ $\overline{\{f_m^k(\omega)\ |k,m\in\mathbf{N}\}}$. 又由$F$的可分性有$F(\omega)=\overline{F(\omega)\cap\mathbf{Z}}\subset\overline{\{f_m^k(\omega)\,|k,m\in\mathbf{N}\}}$. 从 (3) 显然 $\overline{\{f_m^k(\omega)|k,m\in\mathbf{N}\}}\subset\overline{F(\omega)}$. 可见$F(\omega)=\overline{\{f_m^k(\omega)\,|k,m\in\mathbf{N}\}}$.

下列命题说明了定义1.3中的空间是比较广泛的.

命题1.1 若 $(X,\mathscr{T})$ 是第一可数的T_3空间, 则 $(X,\mathscr{T})$ 是单-G_δ型的.

证明: 任给$x\in X$, 设 $\{O_k\,|k\in\mathbf{N}\}$ 是$\mathbf{N}(x)$ (x的邻域系) 的可数基, 不失一般性, 设 $\{O_k\,|k\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{T}$. 不难证明 $\{x\}=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}O_k$.

由 $(X,\mathscr{T})$ 的正则性知, 任给O_k, 存在$U_k\in\mathscr{T}$, 使得$x\in U_k\subset\overline{U_k}\subset O_k$ ([8, p. 224; 定理1.5]). 因而 $(X,\mathscr{T})$ 是单-G_δ型的.

下面的例1.1表明定理1.1和定理1.3中F的值域空间不必是度量空间.

例1.1 设 $(R,\mathscr{T})$, $\mathscr{T}$是以$B=\{[a,b)\,|a,b\in R,\ a<b\}$为基的拓扑. 则 (i) $(R,\mathscr{T})$ 是可分的, 单-G_δ型的, (ii) $(R,\mathscr{T})$ 不是第二可数的. 从而 $(R,\mathscr{T})$ 是不可度量化的 ([8, p. 173; 定理5.14]).

证明: (i) 因为$\overline{Q}=R$ (Q表全体有理数集), 所以 $(R,\mathscr{T})$ 可分. 显然任给$x\in R$, 有 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}[x,x+\frac{1}{n})$, 而任给 $[a,b)\in\mathbf{B}$, $[a,b)$开且闭, 故任给 $[x,x+\frac{1}{n})$, 取$[x,x+\frac{1}{2n})$有$x\in[x,x+\frac{1}{2n})\subset\overline{[x,x+\frac{1}{2n})}\subset[x,x+\frac{1}{n})$. 即 $(R,\mathscr{T})$ 是单-G_δ型的.

(ii) 设V是$\mathscr{T}$的任意一个基. 任给$x\in R$有 $[x,x+1)\in\mathbf{N}(x)\Rightarrow$存在$O_x\in V$使得$x\in O_x\subset$

$[x, x+1)$，显然有 $\inf O_x = x$.

令 φ: $R \to V$, $\varphi(x) = O_x \in V$，则 φ 是单一映射*. 所以 $|V| \geq |R| > \aleph_0$. 即 $(R, \mathscr{T})$ 不是第二可数的.

下面的推论表明上面的定理可用于一类概率度量空间（〔9，p.315；定义1.1〕）.

推论 1.1 设 $(X, \mathscr{F})$ 是概率度量空间，则

(i) 若 F 满足定理1.2的条件 $\Rightarrow F$ 存在有可测选择.

(ii) 若 F 满足定理1.1的条件，且 $(X, \mathscr{F})$ 是第一可数的、紧的 $\Rightarrow F$ 存在有可测选择择.

(iii) 若 F 满足定理1.3的条件，$(X, \mathscr{F})$ 同 (ii) $\Rightarrow F$ 存在有可列多个可测选择 $\{f_n | n \in \mathbf{N}\}$ 使得 $F(\omega) = \overline{\{f_1(\omega) \cdots f_n(\omega) \cdots\}}$ $(\omega \in \Omega)$.

证明：设 $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$，$T(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y = 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，易证 T 是一弱 t 模（〔10，p.123；定义1〕），且 $(X, \mathscr{F}, T)$ 是一广义 Menger 空间（〔10，p.123；定义2〕），由〔10，p.124；定理2〕知 $(X, \mathscr{F}, T)$ 上有一 T_2 拓扑，从而 $(X, \mathscr{F})$ 上有一 T_2 拓扑。所以 (i) 显然成立. 又紧 Hausdorff 空间是 T_4 空间（〔7，p.130；定理9〕），再由命题1.1知 (ii)、(iii) 中的一类概率度量空间是单 G_δ 型的. 故由定理1.1、1.3知(ii)、(iii) 成立.

§2. 可测选择定理对随机规划的应用

在这一节我们把可测选择定理应用于随机规划，证明随机规划最优值函数是可测的，并证明了一类随机规划存在有可测解.

我们讨论形如 $\max\limits_{s.t.\ x \in F(\omega)} \varphi(\omega, x)$ 的随机规划模型.

定义 2.1 （〔11，p.273；定义7〕）设 $\varphi: \mathrm{Gr}F \to R$ $(\mathrm{Gr}F = \{(\omega, x) | \omega \in \Omega, x \in F(\omega)\})$，如果 F: $\Omega \to K^*(X)$ 可分、弱可测，且对任意固定的 $x \in X$ 和任意的开集 $D \subset R$ 有 $\{\omega | x \in F(\omega) \wedge \varphi(\omega, x) \in D\} \in \mathbf{a}$，则称 φ 是以 F 为随机定义域的随机函数，简称随机函数；$A(\omega)$：$\max\limits_{s.t.\ x \in F(\omega)} \varphi(\omega, x)$ 称为随机规划. 又若对任意确定的 $\omega \in \Omega$，$\varphi(\omega, \cdot)$ 是连续的则称 φ 连续.

定理 2.1 设 $(X, \mathscr{T})$ 是单 G_δ 型的，φ 是随机函数，且连续，则 $v(\omega) \hat{=} \sup\{\varphi(\omega, x) | x \in F(\omega)\}$ $(\omega \in \Omega)$ 是可测函数.

证明：因为 $(X, \mathscr{T})$ 是单 G_δ 型的，F 可分、弱可测，所以由定理1.3，存在 F 的可列多个可测选择 $\{f_n^k | n, k \in \mathbf{N}\}$ 使得 $F(\omega) = \overline{\{f_n^k(\omega) | k, n \in \mathbf{N}\}}$ $\omega \in \Omega$.

在定理1.3的证明中，$f_n^k(\omega) \in \overline{G}_n^k(\omega) \subset F(\omega)$，按引理1.1的证明，特别把 f_n^k 定义为：任给 $\omega \in B_{n,k}^i$ $f_n^k(\omega) = z_i$ $(i \in \mathbf{N}, z_i \in \mathbf{Z})$，其中 $B_{n,k}^i = \overline{G}_n^{k-1}(z_i) - \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} G_n^{k-1}(z_j) \in \mathbf{a}$.

由 (3) 和 φ 的连续性有 $v(\omega) = \sup\limits_{n, k \in \mathbf{N}} \varphi(\omega, f_n^k(\omega))$. 下证每个 $\varphi(\omega, f_n^k(\omega))$ 可测，从而 v 可测. 任取开集 $O \subset R$，$\{\omega \in \Omega | \varphi(\omega, f_n^k(\omega)) \in O\} = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} \{\omega \in B_{n,k}^i | \varphi(\omega, z_i) \in O\}$ $= \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} \{\omega \in \Omega | \varphi(\omega, z_i) \in O \wedge z_i \in F(\omega)\} \cap B_{n,k}^i$（因 $\omega \in B_{n,k}^i$ 时 $f_n^k(\omega) = z_i \in \overline{G}_n^k(\omega) \subset F(\omega)$）.

由定义2.1知 $\{\omega \in \Omega | \varphi(\omega, z_i) \in O \wedge z_i \in F(\omega)\} \in \mathbf{a}$，从而 $\{\omega \in \Omega | \varphi(\omega, f_n^k(\omega)) \in O\} \in \mathbf{a}$，

即$\varphi(\omega, f_n^k(\omega))$可测．故$v$是可测函数．

定义2．2 设$A(\omega)$：$\max\limits_{s.t\ x\in F(\omega)} \varphi(\omega, x)$为随机规划，若存在可列集$\mathbf{Z}\subset X$，对任给$\omega_0\in\Omega$，存在$x(\omega_0)\in F(\omega_0)\cap \mathbf{Z}$使得$\varphi(\omega_0, x(\omega_0)) = \max\limits_{s.t\ x\in F(\omega_0)} \varphi(\omega_0, x)$则称$A(\omega)$可列确定可解；若存在可测单值映射$x^*$：$\Omega\to X$，满足任给$\omega\in\Omega$有$x^*(\omega)\in F(\omega)$，且$v(\omega)\hat{=}\sup\{\varphi(\omega, x) \mid x\in F(\omega)\} = \varphi(\omega, x^*(\omega))$可测，则称$A(\omega)$随机可解．$v$称为最优值函数，$x^*$称为可测解．

关于$A(\omega)$的随机可解性我们有下面的定理．

定理2．2 设$(X, \mathscr{T})$是单-G_δ型的，φ：$\Omega\times X\to R$（二元）可测，且任给$\omega\in\Omega$，$\varphi(\omega, \cdot)$连续，$F:\Omega\to K^*(X)$可分、弱可测，则若$A(\omega)$可列确定可解$\Rightarrow A(\omega)$随机可解．

证明： 由定理2．1知v可测，令$s(\omega, x) = v(\omega) - \varphi(\omega, x)$，则$s:\Omega\times X\to R$可测，且任给$\omega\in\Omega$，$s(\omega, \cdot)$连续．从而$s^{-1}(0)\in \mathbf{a}\times\mathscr{B}(X)$（$\mathscr{B}(X)$是由X的开集所生成的Borel代数）．

定义$F_1(\omega) = \{x\in F(\omega) \mid s(\omega, x) = 0\}$ $(\omega\in\Omega)$．

因为$A(\omega)$可列确定可解，所以任给$\omega\in\Omega$，有$F_1(\omega)\cap\mathbf{Z}\neq\phi$；由$s(\omega, \cdot)$的连续性和$F(\omega)$的闭性知$F_1(\omega)$闭且紧．故$F_1:\Omega\to K^*(X)$且$F_1^{-1}(\mathbf{Z}) = \Omega$．

由〔12，p.147；定理1〕知任给$z\in\mathbf{Z}$有$(s^{-1}(0))_z\in\mathbf{a}$，其中$(s^{-1}(0))_z = \{\omega \mid (\omega, z)\in s^{-1}(0)\}$；又$F_1^{-1}(z) = F^{-1}(z)\cap(s^{-1}(0))_z$，但$F^{-1}(z)\in\mathbf{a}$（引理1．2），从而任给$z\in\mathbf{Z}$有$F_1^{-1}(z)\in\mathbf{a}$．故由引理1．1知$F_1$存在可测选择$x^*$：$\Omega\to X$，显然$x^*$即是$A(\omega)$的可测解．由定义2．2知$A(\omega)$随机可解．

参 考 文 献

〔1〕K. Kuratowski C. Ryll-Nardzewski, Ageneral theorem on selectors, Bull. Acad. Polon. Sc.(ser. Math.,Astr.et Phys.), 13(1965), 397—403.

〔2〕Maitra, A., Selection theorems for partitions of polish spaces, Fundamenta Math. 93 (1976), 47—56.

〔3〕Wagner, D. H, Survey of measurable selection theorems, SIAM J. Control Optimization 15(1977), 859—903.

〔4〕Graf, s., Measurable weak selections, Measure theory, Oberwolfach 1979,(Proc. Conf. Oberwolfach, 1979) 117—140.

〔5〕Graf, s., A measurable selection theorem for Compact-Valued maps, Manuscripta Math. 27, No4 (1979), 341—352.

〔6〕C. J. Himmelberg, Measurable relations, Fundamenta Math., 87 (1975), 53—72.

〔7〕Kelley, J.L., 吴从炘译，一般拓扑学，科学出版社（1982）.

〔8〕李孝传、陈玉清，一般拓扑学导引，人民教育出版社（1982）.

〔9〕B. Schweizer, A. sklar, Statistical metric spaces, pacific J. Math., 10 (1960), 313—334.

〔10〕游兆永、朱林户，概率度量空间的拓扑性质，西安交通大学学报，3（1983），123—125.

〔11〕H. W. Engl, Existence of Measurable Optima in Stochastic Nonlinear Programming and Control, Appl. Math. Optim. 5 (1979), 271—284.

〔12〕P. R. Halmos, 王建华译，测度论，科学出版社（1980）.

Several Measurable Selection Theorems on the Topological Spaces

Chen Shaozhong (陈绍仲) *Gu Fuwen* (古福文)
(Chengdu University of Science and Technology)

Abstract

The main theorems of this paper establishes the existence of measurable selections for compact-valued maps whose range space is a topological space. With the help of the measurable selection theorems, we proved the function $v(\omega) \widehat{=} \sup\{\varphi(\omega, x) \mid x \in F(\omega)\}$ is a measurable function and the existence of measurable solution in some stochastic programmings.