1987年5月

数学研究与评论
第七卷 第二期

关于控制算子的若干注记*

杜 鸿 科

(陕西师范大学)

记希尔伯特空间H上的所有有界线性算子全体为B(H)．算子$A\in$B(H) 称为控制的(dominant)，若对任意$\lambda\in$C，存在一常数$M_\lambda>0$(一般和λ有关)，使得

$$(A-\lambda)(A-\lambda)^*\le M_\lambda^2(A-\lambda)^*(A-\lambda) \qquad (0-1)$$

成立．这一概念是由J.G.Stampfli和B.L.Wadhwa在〔1〕中首次引入的．若M_λ可以选为一与λ无关的常数$M>0$时，则称A为M—亚正规的；而当$M=1$，就是通常的亚正规算子．近年来，有很多文章对控制算子作了讨论，例如〔1〕—〔4〕，特别是在〔3〕中，严绍宗和李绍宽还对控制算子作了一些有意义的推广．本文的目的是对控制算子和一些有关的问题作一些进一步的讨论．

为了下面叙述的方便，我们先来说明一些符号的意义．对$T\in$B(H)，它的数值域记为W$(T)\overset{\text{def}}{=\!=}\{(Tx,x),\ \|x\|=1,\ x\in$H$\}$，W$(T)^-$表示W(T)的闭包．对$A$、$B\in$B(H)，其换位子记为$C=[A,B]=AB-BA$，$A$的自换位子记为$\Delta_A=[A^*,A]=A^*A-AA^*$．$T\in$B(H)的本质谱记为$\sigma_e(T)=\{\lambda\in$C: $T-\lambda$不是Fredholm算子$\}$，在B(H)上定义算子$\mathcal{J}_{AB}$: X $\to A$X$-$XB[6]，称为广义导算子(generalized derivation)．

本文共分三节．§1给出了控制算子的一些新的特征；证明了当A(或B)为控制算子时$0\in$W$(C)^-$；还指出了当A为φ—拟亚正规算子[5]时，也有$0\in$W$(C)^-$．§2主要指出了对控制算子A，$0\in\sigma_e(\Delta_A^\alpha)$，其中$\Delta_A^\alpha\overset{\text{def}}{=\!=}(A^*A)^{\alpha/2}-(AA^*)^{\alpha/2}$，$\alpha\ge0$，其次还证明范数可达的$\varphi$—拟亚正规算子有不变子空间．§3讨论了当$A$，$B$为控制算子时$\mathcal{R}(\mathcal{J}_{AB})$的闭性，这是〔6〕中有关结果的推广．

§1 在本节中，我们首先给出控制算子的一些新的特征．对任意$\lambda\in$C，令$A-\lambda=H_\lambda+iJ_\lambda$为算子$A-\lambda$的直角分解．以$\mathcal{R}(T)$记算子$T$的值域．

命题1.1 算子$A\in$B(H)，则下列各命题等价：

(i) 算子A是控制的；

(ii) $\mathcal{R}(H_\lambda)\subseteq\mathcal{R}((A-\lambda)^*)$，$\forall\lambda\in$C；

(iii) $H_\lambda^2\le M_\lambda^2(A-\lambda)^*(A-\lambda)$，$M_\lambda>0$，$\forall\lambda\in$C．

证明 反复使用〔1〕中定理2.1．

值得指出的是，在命题1.1中，把H_λ换以J_λ结论也成立．

我们知道，在B(H)中的全体Hilbert-Schmidt算子类中，若定义内积$(X,Y)_2=$tr(Y^*X)，则它是一希尔伯特空间，记其为HS．对任意$A\in$B(H)，在HS上定义算子$\mathcal{A}$X$=$

*1983年6月8日收到．

$\mathscr{A}X$, $\mathscr{B}X=XA$, $\forall X\in HS$. 则$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$是HS上的线性有界算子. 直接计算知$\mathscr{A}^*X=A^*X$, $\mathscr{B}^*X=XA^*$, 下面的命题是借助于HS对控制算子的刻划.

命题1.2 算子$A\in B(H)$为控制算子的充要条件是$\mathscr{A}$(或$\mathscr{B}$)为HS上的控制算子.

证明 "$\Rightarrow$"由于A为控制的, 根据〔7〕中定理2.1, 对任意$\lambda\in C$, 存在一有界线性算子$D_\lambda\in B(H)$, 使得$A-\lambda=(A-\lambda)^*D_\lambda$. 对任意$X\in HS$, $(\mathscr{A}-\lambda)X=(A-\lambda)X=(A-\lambda)\cdot D_\lambda X=(\mathscr{A}-\lambda)^*D_\lambda X\in\mathscr{R}((\mathscr{A}-\lambda)^*)$, 这说明$\mathscr{R}(\mathscr{A}-\lambda)\subseteq\mathscr{R}((\mathscr{A}-\lambda)^*)$, 即$\mathscr{A}$为控制的.

"$\Leftarrow$"若$\mathscr{A}$为控制的, 则对任意$\lambda\in C$, $X\in HS$, 总存在$Y\in HS$. 使得$(\mathscr{A}-\lambda)X=(\mathscr{A}-\lambda)^*Y$, 这就是$(A-\lambda)X=(A-\lambda)^*Y$. 对任意$x_0\in H$, 作$X_0=(\cdot,x_0)x_0$, 显然$X_0\in HS$, 这时易知$(A-\lambda)x_0\in\mathscr{R}((A-\lambda)^*)$, 即$A$为控制的. 类似可证$\mathscr{B}^*$为控制的情形. 证完.

下列命题是〔8〕中定理1.5.1的推广.

命题1.3 算子A, $B\in B(H)$, 若A(或B)或A^*(或B^*)为控制算子, 则$0\in W(C)^-$, 其中$C=AB-BA$.

证明 设$\lambda\in\Pi(A)$($\Pi(T)$表示算子T的近似点谱), 因A是控制的, 则存在单位向量列$\{f_n\}$, 使得$(A-\lambda)f_n\to 0$且$(A-\lambda)^*f_n\to 0$, 从而

$$\begin{aligned}(Cf_n,f_n)&=((A-\lambda)B-B(A-\lambda))f_n,f_n)\\&=(Bf_n,(A-\lambda)^*f_n)-((A-\lambda)f_n,B^*f_n)\to 0\end{aligned}$$

即$0\in W(C)^-$. 若A^*为控制的证法类似, 证完.

我们看到命题1.4不仅推广为〔8〕中定理1.5.1, 在证法上似也比〔8〕中定理1.5.1简单的多, 受这一证法的启示, 我们还有如下一些命题.

回忆〔9〕中一算子$A\in B(H)$, 若$A^*A\geq(A+A^*/2)^2$, 则称之为弱正规算子(weak normal), 其全体记为(WN).

命题1.4 若算子A(或A^*)$\in$(WN), 且$\sigma(A)\cap\mathbf{R}\neq\phi$, 则对任意$B\in B(H)$, 总有$0\in W(C)^-$.

证明 若$A\in$(WN)且$\sigma(A)\cap\mathbf{R}\neq\phi$, 则存在实数$\lambda\in\Pi(A)$, 直接验证知这时$A-\lambda\in$(WN), 从而存在单位向量列$\{f_n\}$, 使$(A-\lambda)f_n\to 0$, 且$(A-\lambda)^*f_n\to 0$. 由命题1.3的证明知$0\in W(C)^-$, 证完.

对算子$A\in B(H)$, 若$(A^*A)^{1/2}-(AA^*)^{1/2}\geq 0$, 则称之为半亚正规的[5]. 若存在标函数(即在〔0, $+\infty$)上严格单增的连续函数)φ, 使$\widetilde{A}=U\varphi(P)$是半亚正规的, 则称$A$为$\varphi$—拟亚正规的[5], 这里$A=UP$是$A$的极分解, U是一个等距算子. 最近, 陈晓漫〔10〕证明了: 若$A=UP$是φ—拟亚正规的, $re^{i\theta}\in\Pi(A)$, $r\neq 0$, 则存在单位向量列$\{f_n\}$, 使$\|(UP-re^{i\theta})f_n\|\to 0$, $\|(P-r)f_n\|\to 0$, $\|(U-e^{i\theta})f_n\|\to 0$同时成立.

命题1.5 若$A\in B(H)$是φ-拟亚正规算子, 则对任一算子$B\in B(H)$, 有$0\in W(C)^-$.

证明 若$\sigma(A)=\{0\}$, 则由〔10〕中定理2易知$A=0$, 则结论显然. 若$\sigma(A)\neq\{0\}$, 则必有$\lambda\neq 0$, 且$\lambda\in\Pi(A)$, 记$\lambda=re^{i\theta}$从而存在单位向量列$\{f_n\}$, 使$\|(A-\lambda)f_n\|\to 0$, $\|(P-r)f_n\|\to 0$, $\|(U-e^{i\theta})f_n\|\to 0$[10]. 由于$U$是一等距算子, 则有$\|(U^*-e^{-i\theta})f_n\|\to 0$, 设$x_n=(U^*-e^{-i\theta})f_n$, 则$x_n\to 0$. 这时

$$\begin{aligned}(A^*-\bar{\lambda})f_n&=(PU^*-re^{-i\theta})f_n=(P-r)U^*f_n+r(U^*-e^{-i\theta})f_n\\&=e^{-i\theta}(P-r)f_n+(P-r)x_n+r(U^*-e^{-i\theta})f_n\to 0.\end{aligned}$$

于是由命题1.3的证明知$0\in W(C)^-$, 证完.

§ **2** 我们熟知，对算子$A\in B(H)$，若$A^*A-AA^*\geq 0$，则$0\in\sigma(\Delta_A)$〔11，问题188〕，下面来推广这一事实．

引理2.1 若$A=UP$是算子A的极分解，对$\lambda\neq 0$，若有单位向量列$\{f_n\}$，使$(A-\lambda)f_n\to 0$，则$(1-UU^*)f_n\to 0$．

证明 设$(A-\lambda)f_n=y_n$，则$y_n\to 0$．这时还有$f_n=\lambda^{-1}Af_n-\lambda^{-1}y_n$，从而

$$(1-UU^*)f_n=\lambda^{-1}(1-UU^*)Af_n-\lambda^{-1}(1-UU^*)y_n=-\lambda^{-1}(1-UU^*)y_n\to 0.$$

命题2.2 若A为控制算子，则$0\in\sigma_e(\Delta_A^a)$．

证明 若$A=UP$为A的极分解，由于A是控制的，可要求U是一等距算子．对$\lambda\in\Pi(A)\setminus\{0\}$，$\lambda=re^{i\theta}$，存在单位向量列$\{f_n\}$，使$(A-\lambda)f_n\to 0$．易见$(P-r)f_n\to 0$．事实上，由于$A^*A-|\lambda|^2=A^*(A-\lambda)+\lambda(A^*-\bar\lambda)$，从而$(A^*A-|\lambda|^2)f_n\to 0$，由此得$(P-r)f_n\to 0$．一般有

$$(P^a-r^a)f_n\to 0,\quad a>0.\qquad(2-1)$$

又$A-\lambda=U(P-\lambda)+r(U-e^{i\theta})$，则$(U-e^{i\theta})f_n=r^{-1}(A-\lambda)f_n-r^{-1}U(P-\lambda)f_n\to 0$，所以

$$(U^*-e^{-i\theta})f_n\to 0.\qquad(2-2)$$

若$\Delta_A^a=0$，则结论显然．若$\Delta_A^a\neq 0$，记其极分解为$\Delta_A^a=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE_\lambda$．对$\forall\varepsilon>0$，令$H_1=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}dE_\lambda H$，$H_0=\int_{-\varepsilon+0}^{\varepsilon-0}dE_\lambda H$，$H_2=\int_{\varepsilon}^{+\infty}dE_\lambda H$．算子$A$关于空间分解$H=H_1\oplus H_0\oplus H_2$的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$

我们来证明$\Pi(A)\setminus\{0\}\subset\Pi(A_{22})$．

取$\lambda=re^{i\theta}\in\Pi(A)\setminus\{0\}$．由（2—2）记$x_n=(U^*-e^{-i\theta})f_n$，则$x_n\to 0$且$U^*f_n=e^{-i\theta}f_n+x_n$，注意到（2—1）和引理2.1，我们有

$$\Delta_A^af_n=(P^a-UP^aU^*)f_n=(P^a-r^a)f_n-U(P^a-r^a)U^*f_n+r^a(1-UU^*)f_n$$
$$=(P^a-r^a)f_n-e^{-i\theta}U(P^a-r^a)f_n-U(P^a-r^a)x_n+r^a(1-UU^*)f_n\to 0\qquad(2-3)$$

若$f_n=f_n^{(1)}+f_n^{(0)}+f_n^{(2)}$，$f_n^{(i)}\in H_i,i=0,1,2$，则$\|\Delta_A^af_n\|^2\geq\varepsilon^2(\|f_n^{(1)}\|^2+\|f_n^{(2)}\|^2)+\|\Delta_A^af_n^{(0)}\|^2$，由（2—3）显见$f_n^{(1)}$，$f_n^{(2)}\to 0$．这说明$\{\|f_n^{(0)}\|\}$是下有界的，且$(A-\lambda)f_n^{(0)}\to 0$．又因

$$(A-\lambda)f_n^{(0)}=A_{12}f_n^{(0)}+(A_{22}-\lambda)f_n^{(0)}+A_{32}f_n^{(0)},$$

由此可知$\|(A-\lambda)f_n^{(0)}\|\geq\|(A_{22}-\lambda)f_n^{(0)}\|$，所以$(A_{22}-\lambda)f_n^{(0)}\to 0$，即$\lambda\in\Pi(A_{22})$，这说明$\Pi(A)\setminus\{0\}\subset\Pi(A_{22})$．

若$0\notin\sigma_e(\Delta_A^a)$，则必存在$\delta>0$，使当取$\varepsilon=\delta$时$H_0$是有限维的．这时$\Pi(A_{22})$是有限集，由上面所证$\Pi(A)$，从而$\sigma(A)$为有限集．

当$\sigma(A)$是一有限集，取$\lambda_0\in\sigma_e(A)$．我们来说明当$\dim\mathscr{N}(T-\lambda_0)<\infty$时$\mathscr{R}(T-\lambda_0)$不闭．用反证法，若$\mathscr{R}(T-\lambda_0)$闭，则关于空间分解$H=\mathscr{N}(T-\lambda_0)\oplus\mathscr{R}((T-\lambda)^*)$算子$T-\lambda_0$的矩阵表为

$$T-\lambda_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&T_0-\lambda_0\end{pmatrix}$$

显然$\lambda_0\in\sigma_r(T_0)$〔17〕，这说明$\sigma(T_0)$包含以$\lambda_0$为园心的一个开园盘，又$\sigma(T_0)\subset\sigma(T)$，这和

$\sigma(T)$ 有限矛盾．

当$\dim \mathcal{N}(A-\lambda_0)=\infty$时，显然有$0\in\sigma_e(\Delta_A^a)$．当$\mathcal{R}(A-\lambda_0)$不闭时，根据〔12,推论4〕存在正规正交序列$\{x_n\}\subset$H，使$(A-\lambda_0)x_n\to 0$且$(A-\lambda_0)^*x_n\to 0$．类似于（2—3）可证$\Delta_A^a x_n\to 0$．这说明$0\in\sigma_e(\Delta_A^a)$，证完．

对φ—拟亚正规算子有类似的结果．

命题2.3 设$A=UP$是φ—拟亚正规的，则$0\in\sigma_e(\Delta_A^a)$

证明 与命题2.2的证法类似，仅需注意到当$\sigma(A)$为有限集时由〔10〕中定理2易于推出$UP=PU$，即A为正规算子，证完．

对算子$T\in$B(H)，若存在单位向量x，使$\|Tx\|=\|T\|$，则称T为可达范数的．

命题2.4 算子$A\in$B(H)是可达范数的φ—拟亚正规算子，则A有非平凡不变子空间．

证明 若$\overline{\mathcal{R}(A)}\neq$H或$\overline{\mathcal{R}(A^*)}\neq$H，则$A$显然有非平凡的不变子空间．因而，以下设$\overline{\mathcal{R}(A)}=\overline{\mathcal{R}(A^*)}=$H，这时在$A$的极分解$A=UP$中，$U$可取为酉算子．记M$=\{x:\|Ax\|=\|A\|\|x\|\}$，显然M是一闭子空间，又已知$A$是可达范数的，还有M$\neq\{0\}$．

当M=H时，则$A^*A=\|A\|^2$，从而$A/\|A\|$是一等距算子，它显然有非平凡的不变子空间．

当M$\neq$H时，我们来证明M即为A的非平凡不变子空间．显然，M是P的属于特征值$\|P\|=\|A\|$的特征子空间．由于A是φ—拟亚正规的，$\varphi(P)-U\varphi(P)U^*\geq 0$，从而$U^*\varphi(P)U-\varphi(p)\geq 0$．对任意$x\in$M，$(U^*\varphi(P)U-\varphi(P))x=U^*(\varphi(P))-\varphi(\|P\|))Ux$．注意到$\varphi(t)$的严格单增性得$\varphi(P)-\varphi(\|P\|)\leq 0$，也即$U^*(\varphi(P)-\varphi(\|P\|)U\leq 0$．这样一来必有$(U^*\varphi(P)U-\varphi(\|P\|))x=0$．所以，$U^*\varphi(P)Ux=\varphi(\|P\|)x$，由此得$\varphi(P)Ux=\varphi(\|P\|)Ux$．这说明M是关于$U$不变的．因而M是$A$的不变子空间（这里用到M$=\{x\in$H, $\varphi(P)x=\varphi(\|P\|)x\}$这一事实）．证完．

§3 在〔6〕中L．A．Fialkov讨论了当A，B是亚正规算子时，广义导算子$\mathcal{T}_{AB}$的值域$\mathcal{R}(\mathcal{T}_{AB})$在B(H)中的闭性，本节首先来推广〔6〕中的一些结果．

引理3.1 若$A\in$B(H)是控制算子，λ是$\Pi(A)$的极限点，则$\mathcal{R}(A-\lambda)$不闭

证明 不失一般性可设$\lambda=0$，取$\{\lambda_n\}\subset\Pi(A)$，$\lambda_n\to 0$且$\lambda_n\neq\lambda_m$，$n\neq m$．要证$\mathcal{R}(A)$不闭，由〔12〕命题1，只需证明0是$\sigma(AA^*)$的极限点．事实上，由于$AA^*-|\lambda_n|^2=A(A^*-\bar{\lambda}_n)+\bar{\lambda}_n(A-\lambda_n)$，所以$|\lambda_n|^2\in\sigma(AA^*)$，但$|\lambda_n|^2\to 0$，即0是$\sigma(AA^*)$的极限点，证完．

细心考察引理3.1的证明，我们看到对A是φ—拟亚正规算子引理3.1也成立．同时，注意到引理3.1，还可以简化命题2.2的证明，但在命题2.2的证明中由于包含了$\Pi(A)\setminus\{0\}\subset\Pi(A_{22})$这一有趣的事实，我们把简化命题2.2的证明留给读者，

命题3.2 若A和B是控制算子，且$\Pi(A)\cap\Pi(B)$包含$\Pi(A)\cup\Pi(B)$的极限点，则$\mathcal{R}(\mathcal{T}_{AB})$不闭．

证明 注意到引理3.1，其余证法与〔6〕中定理4.8类似．

命题3.3 若A和B是M—亚正规算子，且$\sigma(A)\cap\sigma(B)$不包含$\sigma(A)\cup\sigma(B)$的极限点，则$\mathcal{R}(\mathcal{T}_{AB})$闭，且$\mathcal{R}(\mathcal{T}_{AB})+\mathcal{N}(\mathcal{T}_{AB})=$B(H)．

这里$\mathcal{N}(\mathcal{T}_{AB})=\{X\in$B(H)$:AX=XB\}$．

证明 类似〔6，命题4.13〕，仅需注意如下事实：M—亚正规算子在其不变子空间上的限制还是M—亚正规的；谱点有限的M—亚正规算子是正规的[16]；M—亚正规算子的正规部分是约化的[2]即可。

命题3.4 对任意一对算子(A,B)，$\mathscr{R}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{A^*B^*})=\{0\}$.

证明 设$C\in\mathscr{R}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{A^*B^*})$，则存在$X_0\in B(H)$，使$C=AX_0-X_0B$，且$AC=CB$，$A^*C=CB^*$，所以

$$CC^*=AX_0C^*-X_0BC^*=AX_0C^*-X_0C^*A$$

且$ACC^*=CBC^*=CC^*A$，因而$CC^*\in\mathscr{R}(\mathscr{T}_A)\cap\{A\}'$（$\mathscr{T}_AX=AX-XA$，$\{A\}'$记$A$的换位），由〔11〕问题184知，$CC^*$应是拟幂零的，从而$CC^*=0$，即$C=0$，证完.

在[14]中称一对算子(A,B)具有性质PF，是指对任一$X\in B(H)$，$AX=XB$蕴涵$A^*X=XB^*$.

推论3.5 若算子对(A,B)具有性质PF，则

$$\mathscr{R}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{AB})=\{0\}.$$

推论3.6 $(\mathscr{R}(\mathscr{T}_{AB})\cup\mathscr{R}(\mathscr{T}_{A^*B^*}))\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{AB})\cap\mathscr{N}(\mathscr{T}_{A^*B^*})=\{0\}$.

推论3.7 $\mathscr{R}(\mathscr{T}_A)\cap\{A\}'\cap\{A^*\}'=\{0\}$.

由于$\mathscr{R}(\mathscr{T}_A)\cap\{A^*\}'=\{0\}$是否成立仍是一个公开问题[15]，因而推论3.7还是有意义的.

参 考 文 献

〔1〕Stampfli, J.G., Wadhwa, B.L., On dominant operator, Manatsh Math., 84(1977), 143—153.

〔2〕Stampfli, J.G., An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operator, Indiana Univ.Math.J., 25(1976), 359365.

〔3〕严绍宽，李绍宽，关于Putnam-Fuglede型定理，中国科学，A辑，Vol.28，1985，459—468.

〔4〕Williams, L.R., Quasisimilarity and hyponormal operators, J.Operator theory, 5(1981), 127—139.

〔5〕夏道行，关于非正常算子—半亚正常算子，中国科学（1979），No.1，936—946.

〔6〕Fialkow, L. A., Elements of spectral theory for generalized derivation, J.Operator Theory, 3(1980), 89—113.

〔7〕Fillmore, P.A., Williams, J.P., On operator ranges, Adrances in Math., 7(1971), 254—281.

〔8〕Putnam, C.R., Commutation properties of Hilbert space operator, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

〔9〕杜鸿科，算子是Hermitain一些充要条件与有关结果，数学年刊，Vol.5.A辑，1984，378—387.

〔10〕陈晓漫，φ—拟亚正常算子的谱的不等式，科学通报，Vol.28，No.21，1983，1292—1294.

〔11〕Halmos, P.R., A Hilbert space problem book. New York-Heidelberg, 1974.

〔12〕杜鸿科，关于闭值域算子，陕西师范大学学报（自然科学版）No.2(1983)，18—25.

〔13〕李绍宽，关于非正常算子的谱子空间，数学年刊，Vol.3，No.3（1982），303—307.

〔14〕侯晋川、杜鸿科，关于两种形式的Fuglede—Putnam定理的注记，数学进展Vol.13，No.1，1984，61—62.

[15] Williams. J.P., Derivation ranges, Open problems, Topics in modern operator theory: Advances and applications, vol 2 (1981), 319—328, Birkhauser.
[16] Radjabalipour, M., On majorization and normality of operators, Proc. Amer. Math. Soc., vol.22, No.1 (1977), 105—110.
[17] 夏道行. 线性算子谱论. 科学出版社. 北京, 1983.

Some Remarks On Dominant Operators

Du Hongke

(Shanxi Normal University, Xian)

Abstract

Let B(H) be the set of all bounded linear operators on a Hilbert space H. An operator $T\in B(H)$ is called dominant if $(T-\lambda)(T-\lambda)^*\leq M_\lambda^2(T-\lambda)^*(T-\lambda)$, $\forall\lambda\in C$. The numerical range of T is difined by $W(T)=\{(Tx,x): \|x\|=1, x\in H\}$. In Section 1 some new characteristic of dominant operators are given. If $C=AB-BA$, we prove that $0\in W(C)^-$ then A is a dominart or φ-quasihyponormal. In Section 2 we prove that $0\in\sigma_e(\Delta_A^a)$ if A is a dominant, where $\Delta_A^a \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{a/2}-(AA^*)^{a/2}$, we also prove that if $A\in B(H)$ is a norm attaining φ-quasihyponormal, then A has a non-trivial invariant subspace. In Section 3 we discuss the closeness of the range of bounded linear operator $\mathcal{T}_{AB}$: $X\to AX-XB$, and prove that $\mathcal{R}(\delta_A)\cap\{A\}'\cap\{A^*\}'=0$, where δ_A: $X\to AX-XA$.