关于2m个未知函数的一阶椭园组的广义变态Dirichlet边值问题

杨广武 李生训
（河北化工学院）

§1. 引 言

平面E内多连域D上的一阶非线性椭园组（1.1）$\Phi_k(x, y, u_1, \cdots, u_{2m}, u_{1x}, \cdots, u_{2mx}, u_{1y}, \cdots, u_{2my}) = 0$，$k=1,\cdots,2m$. 在一定条件下可化为如下复形式（〔1〕）：（1.2）$w_{j\bar z} = F_j(z, w_1, \cdots, w_m, w_{1z}, \cdots, w_{mz})$，$j=1,\cdots,2m$，其中$z=x+iy$，$w_j(z)=u_j(z)+iu_{j+m}(z)$，$j=1,\cdots,m$. 不失一般性，设D是单位园内$N+1$连通园界域，其边界$\Gamma=\bigcup\Gamma_j$，$\Gamma_j$：$|z-z_j|=r_j$，$j=0,\cdots,N$，$z_0=0\in D$，$r_0=1$；并设复方程组（1.2）满足“条件C”,即

1）$F(z,w,w_z)=Q^1w_z+Q^2\overline{w_z}+A^1w+A^2\overline{w}+A^3$，其中（1.3）$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T$（$()^T$表示（）的转置）；$Q^k=(Q^k_{ji})_{m\times m}$；$A^k=(A^k_{ji})_{m\times m}$，$k=1,2$；$A^3=(A^3_{11},\cdots,A^3_{m1})^T$，而$A^k_{ji}=A^k_{ji}(z,w)$对D内任意具有一阶广义微商的函数$w(z)$,满足

（1.4）$\|A^k_{ji}\|_{L_p(\overline{D})}\le K_0<+\infty(j\ge i)$，$\|A^k_{ji}\|_{L_p(\overline{D})}\le K_1<K_0(j<i)$，$p>2$，$k=1,2,3$；$j,i=1,\cdots,m$. K_0, K_1均为常数.

2）函数$Q^k_{ji}(z,w,v)(k=1,2)$. $A^k_{ji}(z,w)(k=1,2,3)$，j、$i=1,\cdots,m$，对D内任意具有一阶广义微商的函数$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T$与可测函数$v(z)=(v_1(z),\cdots,v_m(z))^T$ $(v(z)\in L_{p_0}(\overline{D})$，$2<p_0<p)$均在D内可测，且对几乎所有$z\in D$与$v_j(z)\in E$ $(j=1,\cdots,m)$关于$w(z)$连续.

3）$F(z,w,w_z)$在D上满足不等式：

（1.5）$|F_j(z,w,v^1)-F_j(z,w,v^2)|\le\sum_{i=1}^m q_{ji}|v^1_i-v^2_i|$，$q_{ji}$ $(j,i=1,\cdots,m)$均为非负常数，满足$\sum_{i=1}^m q_{ji}\le q_0<\frac{1}{m}$，$1\le j\le m$，且$q_{ji}<K_1<1$，当$j<i$，$1\le j,i\le m$.

文〔2〕讨论了一阶复方程组（1.2）于单连域上的Dirichlet边值问题解的存在唯一性，但加于复方程组的条件较强. 本文将在条件C及K_1适当小的前提下证明复方程组（1.2）于多连域D上广义变态Dirichlet边值问题的可解性. 此种边值问题称作“问题A”，其边界条件可写成：

$$\text{Re}[\lambda(t)w(t)]=r(t)+h(t),\quad t\in\Gamma,\ \text{其中} \tag{1.6}$$

* 1983年12月21月收到.

$$\lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2(t) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m(t)\end{pmatrix}\qquad \overline{\lambda_j(t)}=\begin{cases} t^{x}, & t\in\Gamma_0,\ \text{指标}\ x=0\ \text{或}\ -1,\\ e^{-iQ_{jk}}, & t\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,N,\end{cases}$$

Q_{jk} 是一些固定常数，$r(t)=(r_1(t),\cdots,r_m(t))^{\mathrm T}$，$C_\nu[r(t),\Gamma]=\sum_{j=1}^{m}C_\nu[r_j(t),\Gamma]\le l_0<+\infty$，$\frac{1}{2}<\nu<1$，$h(t)=(h_1(t),\cdots,h_m(t))^{\mathrm T}$，$h_j(z)=h_{jk}$（$j=1,\cdots,m$，$k=0,\cdots,N$）均为待定常数．当指标$k=0$时，则取$h_{j0}=0$；还要求解$w_j(t)$满足

(1.7) $\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}w_j(z)d\theta=b_j$（常数），$|b_j|\le l_0$（当$x=0$，$j=1,\cdots,m$）．

称当$r(t)\equiv0$时的问题A为“问题A_0”．

§2．解析函数的广义变态 Dirichlet 问题A

为讨论问题A的可解性，先给出复方程

(2.1) $w_{\bar z}=w(z)$，$w(z)\in L_p(\overline{D})$，$p>2$，

适合问题A的边界条件

(2.2) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)+h(t)$，$t\in\Gamma$

之解$w(z)$的积分表示式及其性质（$\lambda(t)$，$r(t)$，$h(t)$类似（1.6）中所设，但与$j=1,\cdots,m$无关）．

引理2.1 解析函数问题A的解$\Phi(z)$是存在唯一的，且满足下述估计式：

(2.3) $C_a[\Phi(t),\overline{D}]\le M_1$，$\|\Phi'(t)\|_{L_{p_0}(\overline{D})}\le M_2$，其中$a=\frac{p_0-2}{p_0}$，$2<p_0<\frac{1}{1-\nu}$；

$M_j=M_j(p_0,D,\nu,l_0)$，$j=1,2$．

证明 文〔3〕中证明了当$x=-1$以及当$x=0$且满足点型条件的问题A解的存在唯一性，而这里用如下积分条件代替点型条件$\mathrm{Im}[W(1)]=a$（常数）：

(2.4) $\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}w(t)d\theta=b$，$|b|\le\rho_0$．

实际上这两个条件是等价的．设$\Phi_0(t)$是解析函数问题A（$x=0$）之解，且适合点型条件$\mathrm{Im}[\Phi_0(1)]=a$（可取$a=1$），记$\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}\Phi_0(z)d\theta=b_0$，如果$b_0=b$，则已达要求．否则，求适合（2.2）的齐次边界条件（$r(t)\equiv0$）的解析函数$\Phi_1(z)$，使适合点型条件$\mathrm{Im}\Phi_1(1)=1$，由此和〔4〕定理4.6可推得$\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}\Phi_1(z)d\theta=b_1\ne0$．于是$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\frac{b-b_0}{b_1}\Phi_1(z)$即为解析函数问题A（$x=0$）的解，适合积分条件（2.4）．至于问题（$x=0$）解的唯一性也容易证明．为了得到估计式（2.3），也可如〔5〕定理2.3那样用反证法来证明．

其次，证明

定理2.1 一阶复方程（2.1）问题A_0具有如下形式的Green函数$G_1(z,\zeta)$、$G_2(z,\zeta)$，

即

$$
(2.5)\quad \begin{cases} G_1(z,\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z}+\sum\limits_{j=0}^{N}g_j(z,\zeta)+H_2(z,\zeta),\quad z\in\overline{D}, \\ G_2(z,\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z}-\sum\limits_{j=0}^{N}g_j(z,\zeta)-H_2(z,\zeta),\quad \zeta\in\overline{D}, \end{cases}
$$
其中

$$
g_0(z,\zeta)=\begin{cases} z/(1-\overline{\zeta}z), & 当x=0, \\ \overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z), & 当x=-1, \end{cases}\qquad g_j(z,\zeta)=\frac{e^{2i\theta}\cdot(z-z_j)}{r_j^2-(\overline{\zeta}-\overline{z}_j)(z-z_j)},\ j=1,\cdots,N.
$$

又$H_1(z,\zeta)$、$H_2(z,\zeta)$分别是适合如下边界条件之解析函数问题A_1，问题A_2的解：

$$
(2.6)\quad \begin{cases} \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\,H_1(z,\zeta)]=-\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\sum\limits_{\substack{m=0,\\ m\neq j}}^{N}g_m(z,\zeta)]+h(z),\ z\in\Gamma_j,\ j=0,\cdots,N. \\ \mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}H_1(z,\zeta)d\theta=-\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}\sum\limits_{m=1}^{N}g_m(z,\zeta)d\theta,\ (当x=0), \end{cases}
$$

$$
(2.7)\quad \begin{cases} \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}iH_2(z,\zeta)]=-\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}i\sum\limits_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{N}g_m(z,\zeta)]+h(z),\ z\in\Gamma_j,\ j=0,\cdots,N. \\ \mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}iH_2(z,\zeta)d\theta=-\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}i\sum\limits_{m=1}^{N}g_m(z,\zeta)d\theta,\ (当x=0). \end{cases}
$$

这里$h(z)$如（1.6）中所设，又$H_j(z,\zeta)$、$H_{jz}(z,\zeta)$关于$\zeta\in\overline{D}$连续，且有

$$
(2.8)\quad C_v^1[H_j(z,\zeta),\overline{D}]\leq M_3=M_3(D),\ j=1,2,\ \zeta\in\overline{D},\ \frac{1}{2}<v<1.
$$

证明 由引理2.1知上述问题A_1．问题A_2的解存在唯一，而$H_j(z,\zeta)$、$H_{jz}(z,\zeta)$关于$\zeta\in\overline{D}$连续且满足（2.8）可如〔3〕引理5.1那样来证明．又由（2.6）、（2.7）及$\frac{1}{\zeta-z}$、$g_j(z,\zeta)$的性质，便知（2.5）式所示的$G_1(z,\zeta)$、$G_2(z,\zeta)$在$z=\zeta$具有一阶极点，在D内除$z=\zeta$外解析，且$G_1(z,\zeta)$还适合问题A_0的边界条件．

现在，证明

定理2.2 设$\omega(z)\in L_p(\overline{D})$，$q>1$，则二重积分

$$
(2.9)\quad \widetilde{T}\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_D[G_1(z,\zeta)\mathrm{Re}\,\omega(\zeta)+iG_2(z,\zeta)\,\mathrm{Im}\,\omega(\zeta)]d\sigma_\zeta
$$

具有性质：

（1） $(T\omega)_{\bar z}=\omega(z)$，$\widetilde{S}\omega=(\widetilde{T}\omega)_z=\pi\omega+\sum\limits_{j=0}^{N}\pi_j\omega+\pi_*\omega$，其中

$$
\pi\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,\qquad \pi_j\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{e^{2i\theta}r_j^2\overline{\omega(\zeta)}\,d\sigma_\zeta}{[r_j^2-(\overline{\zeta}-\overline{z}_j)(z-z_j)]^2},\ j=1,\cdots,N.
$$

$$
(2.10)\quad \pi_0\omega=\begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\iint_D\dfrac{\overline{\omega(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}z)^2}d\sigma, & 当x=0, \\ -\dfrac{1}{\pi}\iint_D\dfrac{\zeta^2\overline{\omega(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}z)^2}d\sigma_\zeta, & 当x=-1. \end{cases}
$$

$$
\pi_*\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_D[H'_{1z}(z,\zeta)\mathrm{Re}\,\omega(\zeta)+iH'_{2z}(z,\zeta)\,\mathrm{Im}\,\omega(\zeta)]d\sigma_\zeta,
$$

这里$\pi_j\omega$（$j=0,\cdots,N$）、$\pi.\omega$都是$z\in D$的解析函数；

（2）$\tilde{S}\omega=(\tilde{T}\omega)_z$是$L_p(\overline{D})$上的线性有界算子，满足

（2.11）　$\|S\omega\|_{L_p(\overline{D})}\le\Lambda_p\|\omega\|_{L_p(\overline{D})}$，　$\Lambda_2=1$，

其中Λ_p是使上式成立的最小常数；

（3）当非负常数$q_0<1$时，则总存在足够接近2的常数p_0（$2<p_0<\min(p,\frac{1}{1-\nu})$），使$q_0\Lambda_{p_0}=1$；

（4）当$p>2$时，则存在p_0（$2<p_0<\min(\frac{1}{1-\nu})$），使$\tilde{T}\omega$满足估计式

（2.12）$C_\alpha[\tilde{T}\omega,\overline{D}]\le M_4\|\omega\|_{L_{p_0}(\overline{D})}$，其中$\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}$，　$M_4=M_4(p_0,D)$，并且$\tilde{T}\omega$适问题A_0的边界条件及积分条件：

（2.13）　$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}T\omega]=h(t)$，$t\in\Gamma$，　$x=0$，-1，

（2.14）　$\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}\tilde{T}\omega\,d\theta=0$，$x=0$．

证明　证法与〔5〕定理3.1．定理3.2的方法类似，故这里只证明（2.11）中的$\Lambda_2=1$．先设$\omega(z)\in D_\infty^0(D)$，则由Green公式，有

（2.15）　$\|S\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}=\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_\Gamma\overline{(\tilde{T}\omega)}\cdot(\tilde{T}\omega)_z dz+\|\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}$，

由于$\tilde{T}\omega$适合边界条件（2.14），故有

（2.16）
$$\begin{cases}\overline{(\tilde{T}\omega)}=-\tilde{T}\omega\ （当x=0），而\mathrm{Re}[iz^2(\tilde{T}\omega)_z+iz\,\overline{(\tilde{T}\omega)}]=0（当x=-1），\\ \qquad z\in\Gamma_0,\\ \overline{(\tilde{T}\omega)}=-e^{-2i\theta_j}\tilde{T}\omega+2h_je^{-i\theta_j},\ z\in\Gamma_j,\quad j=1,\cdots,N.\end{cases}$$

因而当$x=0$时，有

（2.17）
$$I=\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_\Gamma\overline{(\tilde{T}\omega)}(\tilde{T}\omega)_z dz=\mathrm{Re}\Big\{\frac{-1}{2i}\int_{\Gamma_0}\tilde{T}\omega(\tilde{T}\omega)_z dz+\sum_{j=1}^N\Big[\frac{-e^{-2i\theta}}{2i}\int_{\Gamma_j}(\tilde{T}\omega)(\tilde{T}\omega)_z dz+\frac{h_je^{-i\theta_j}}{j}\int_{\Gamma_j}(\tilde{T}\omega)_z dz\Big]\Big\}=0,$$

而当$x=-1$时，可以算出

（2.18）
$$I=\mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\overline{iz\overline{(\tilde{T}\omega)}}[iz^2(\tilde{T}\omega)_z]d\theta\Big\}\le-h_0^2\pi\le0.$$

联合（2.15）、(2.17)、(2.18)，便知$\Lambda_2\le1$，即$\|S\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}\le\Lambda_2\|\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}$，由于$D_\infty^0(D)$在$L_2(\overline{D})$中的稠密性，可知对任意的$\omega(\omega)\in L_2(\overline{D})$，均有$\|\tilde{S}\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}\le\|\omega\|^2_{L_2(\overline{D})}$，并可取$\Lambda_2=1$，再由Riesz凸性定理即得（2.12）式．

由定理2.1，易知当$2<p_0<\min(p,\frac{1}{1-\nu})$，$p>2$时，$\tilde{T}\omega$适合边界条件（2.14），并且当$x=0$时，由Cauchy定理、Cauchy公式及（2.6）、（2.7），可得（2.15）式．

另外，使用解析函数问题A的解$\Phi(z)$的积分表示式及其性质（〔3〕），可得一阶复方程程（2.1）问题A的解$W(z)$的表示式与估计式．

定理2.3　设$\|\omega(z)\|_{L_p(\overline{D})}\le K_0<+\infty$，$p>2$，则一阶复方程适合边界条件（2.2）与积分条件（2.4）之问题A的解$W(z)$可表示成：

(2.21)　$W(z)=\Phi(z)+\widetilde{T}\omega$，

其中$\widetilde{T}\omega$如（2.9）所示，$\Phi(z)$是解析函数问题A的解，又$W(z)$满足估计式：

(2.22)　$C_a[W(z),\overline{D}]\leq M_5$，$\| |W_{\bar{z}}|+|W_z| \|_{L_{p_0}(\overline{D})}\leq M_6$，

其中 $a=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$2<p_0<\min\left(p,\dfrac{1}{1-\nu}\right)$，$M_j=M_j(p_0,k_0,D,\nu,l_0)$，$j=5.6$.

§3．复方程组（1.2）广义变态Dirichlet边值问题A的可解性

先给出复方程组（1.2）问题A解的表示式及估计式：

定理3.1　满足条件C的非线性复方程组（1.2）之变态 Dirichlet 问题A属于$W'_{p_0}(D)$的$w(z)$可表示成

(3.1)　$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T=\Phi(z)+\widetilde{T}\omega$，$\omega(z)=w_{\bar{z}}\in L_{p_0}(D)$，

其中$\Phi(z)=(\Phi_1(z),\cdots,\Phi_m(z))^T$是D上的解析函数，满足边界条件（1.6）与积分条件（1.7）．而$\widetilde{T}\omega=(\widetilde{T}\omega_1,\cdots,\widetilde{T}\omega_m)^T$，$\widetilde{T}\omega_j$（$j=1,\cdots,m$）均为§2中所示的积分算子，即

(3.2)　$\widetilde{T}\omega_j=\dfrac{-1}{\pi}\iint\limits_D[G_{j1}(z,\zeta)\mathrm{Re}\,\omega_j(\zeta)+iG_{j2}(z,\zeta)\mathrm{Im}\,\omega_j(\zeta)]d\sigma_\zeta$，$\omega_j(z)\in L_{p_0}(\overline{D})$，$p>2$．

这里$G_{j1}(z,\zeta)$、$G_{j2}(z,\zeta)$都是D内问题A_0的 Green 函数，分别适合当$r(z)\equiv0$．$b_j=0$（$j=1,\cdots,m$）的边界条件（1.6）与积分条件（1.7）；

此外，当条件C中K_1适当小时，满足

(3.3)　$\|W_{j\bar{z}}\|_{L_{p_0}(\overline{D})}=\|\omega_j(z)\|_{L_{p_0}(\overline{D})}\leq M_7$（待定常数）（$j=1,\cdots,m$）

的解$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T$必满足估计式：

(3.4)　$C_a[W_j(z),\overline{D}]\leq M_8$，$\| |w_{\bar{z}}|+|w_z| \|_{L_{p_0}(\overline{D})}\leq M_9$，$j=1,\cdots,m$，

其中$a=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$2<p_0<\min\left(p,\dfrac{1}{1-\nu}\right)$，$M_j=M_j(q_0,p_0,k_0,D,\nu,l_0)<+\infty$，$j=8$，$9$，并可取$M_7=M_9$．

证明　由定理2.3 易知$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T$可表示成（3.1）式．将$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))^T$代入复方程组（1.2），注意到条件C，可知$w_1(z)$几乎处处满足

(3.5)　$w_{1\bar{z}}-Q_{11}^1w_{1z}-Q_{11}^2\overline{w}_{\bar{z}}=A_{11}^1w_1+A_{11}^2\overline{w}_1+A_1^*$，

其中$A_1^*=A_{11}^3+\sum\limits_{j=2}^m[Q_{1j}^1w_{jz}+Q_{1j}^2\overline{w}_{j\bar{z}}+A_{1j}^1w_j+A_{1j}^2\overline{w}_j]$．注意到（1.4）、(1.5）及（3.3），不论对怎样大的常数M_7，只要K_1适当小，就可使

(3.6)　$\|A_1^*\|_{L_{p_0}(\overline{D})}\leq K_2=K_2(p_0,q_0,D,K_0)$．

又因$w_1(z)$适合（1.6）、(1.7），于是仿〔5〕定理4.2，可知$w_1(z)$满足估计式（3.4）（$j=1$）．其次估计$w_2(z)$，注意到$w_2(z)$在$\overline{D}$上几乎处处满足方程

(3.7)　$w_{2\bar{z}}=Q_{22}^1w_{2z}+Q_{22}^2\overline{w}_{2\bar{z}}+A_{22}^1w_2+A_{22}^2\overline{w}_2+A_2^*$，

其中$A_2^*=A_{21}^3+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq2}}^m[Q_{2j}^1w_{jz}+Q_{2j}^2\overline{w}_{2\bar{z}}+A_{2j}^1w_j+A_{2j}^2\overline{w}_j]$．与（3.6）式的导出相仿，只要

K_1适当小，就可使

(3.8) $\quad \| A_2^* \|_{L_{p_0}(\overline{D})} \leq K_3 = K_3(q_0, p_0, K_0, D)$.

那么同样可得$w_2(z)$满足的估计式（3.4）（$j=2$），其中常数M_8，M_9仅依赖于q_0, p_0，K_0, D, ν, l_0。以次类推，即可证$w(z)=(w_1(z), \cdots, w_m(z))^T$满足（3.4），还可取$M_7 - M_9$.

现在，使用Schauder 不动点定理来证明

定理3.2 设一阶复方程组（1.2）满足条件C，又其中常数K_1适当小，则其问题A是可解的.

证明 根据定理3.1中关于问题A的解的表示式（3.1），我们只要证明方程组

(3.9) $\quad \Psi_{\bar z} = F(z, \Phi+\Psi, \Phi'+\Psi_z)$

具有形如$\Psi(z) = ((\Psi_1(z), \cdots, \Psi_m(z))^T = (\widetilde{T}\omega_1, \cdots, \widetilde{T}\omega_m)^T = \widetilde{T}\omega$ （$\omega_j(z) \in L_0(\overline{D})$，$j=1$，$1, \cdots, m$）的解。以$B_m$表示 Banach 空间 $B = L_{p_0}(\overline{D}) \times \cdots \times L_{p_0}(\overline{D})$（$m$重积），$p_0>2$，适合

(3.10) $\quad \| w_j(z) \|_{L_{p_0}(\overline{D})} \leq M_9$ （M_9为（3.4）中的常数），$j=1, \cdots, m$

的可测函数组$\omega = [\omega_1(z), \cdots, \omega_m(z)]$的全体所组成的集合，它是B中有界闭凸集．任取$\omega \in B_m$，作二重积分$\Psi(z) = \widetilde{T}\omega = (\widetilde{T}\omega_1, \cdots, \widetilde{T}\omega_m)^T$，并代入方程组（3.9）右边$\Psi(z)$的位置，记$\widetilde{S}\omega = (\widetilde{T}\omega)_z$，而$(\widetilde{T}\omega)_{\bar z} = \omega(z)$，又将$\widetilde{S}\omega = (\widetilde{S}\omega_1, \cdots, \widetilde{S}\omega_n)^T$中除$\widetilde{S}\omega_1$外的其余积分代入（3.9）式右边$\Psi_z = \widetilde{S}\omega$中，设$\widetilde{S}_1 = (\widetilde{S}\Omega_1, \widetilde{S}\omega_2, \cdots, \widetilde{S}\omega_m)^T$，由压缩映射原理，可从积分方程

(3.11) $\quad \Omega_1 = F_1(Z, \Phi+\widetilde{T}\omega, \Phi'+\widetilde{S}_1\Omega)$

求得唯一解$\Omega_1(z) \in L_{p_0}(\overline{D})$．再设$\widetilde{S}_2\Omega = (\widetilde{S}\Omega_1, \widetilde{S}\Omega_2, \widetilde{S}\omega_3, \cdots, \widetilde{S}\omega_m)^T$，并由

(3.12) $\quad \Omega_2 = F_2(z, \Phi+\widetilde{T}\omega, \Phi'+\widetilde{S}_2\Omega)$

求得唯一解$\Omega_2(z) \in L_{p_0}(\overline{D})$．如此继续下去，可得$\widetilde{S}\Omega = (\widetilde{S}\Omega_1, \cdots, \widetilde{S}\Omega_m)^T$．记$\omega(z)$到$\Omega(z)$的映射为$\Omega = R(\omega)$，而仿定理3.1，可知$\Omega(z)$满足估计式（3.4），即

(3.13) $\quad \| \Omega_j \|_{L_{p_0}(\overline{D})} \leq M_9 < +\infty$，$j=1, \cdots, m$.

这表明$\Omega = R(\omega)$将B_M映射到自身．此外，我们还可证明，$\Omega = R(\omega)$将B_M连续映射到自身的紧集．因此，由 Schauder 不动点定理，可知积分方程

(3.14) $\quad \omega = F(z, \Phi+\widetilde{T}\omega, \Phi'+\widetilde{S}\omega)$

在B_M内存在着解$\omega(z) = (\omega_1(z), \cdots, \omega_m(z))^T$，这就证明了方程（3.9）具有解$\Psi(z) = (\widetilde{T}\omega_1, \cdots, \widetilde{T}\omega_m)^T$，因而复方程组（1.2）存在着满足边界条件（1.6）与积分条件（1.7）的广义变态 Dirichlet 边值问题A的解$w(z) = \Phi(z) + \Psi(z)$，即此解可表示成（3.1）式.

由定理3.1、定理2.3以及积分方程的 Fredholm 定理，还可得到形如下的一阶线性一致椭园型复方程组的广义变态 Dirichlet 边值问题的可解性结果：

(3.15) $w_{\bar z} - Q^1 w_z - Q^2 \bar w_z = \varepsilon f(z, w) + A^3(z)$，其中$f(z, w) = A^1 w + A^2 \bar w$，$w(z) = (w_1(z), \cdots, w_m(z))^T$，$Q^k = (Q^k_{ji})_{m \times m}$，$A^k = (A^k_{ji}(z))_{m \times m}$，$k=1,2$；$A^3 = (A^3_{11}(z), \cdots, A^3_{m1}(z))^T$；$\varepsilon$为参数.

又，系数满足

$$(3.16) \quad |Q_{ji}^1|+|Q_{ji}^2|\le q_{ji}, \quad \sum_{i=1}^{m} q_{ji}=q_j<\frac{1}{m}, \quad j=1,\cdots,m;$$

$$\|A_{jk}^k\|_{L_p(\overline{D})}\le K_0<+\infty, \quad j、i=1,\cdots、m, \quad k=1,2,3,; \quad p>2.$$

参 考 文 献

〔1〕闻国椿，方爱农，二阶非线性椭园型方程的复形式与某些边值问题，数学年刊，2（1981），201—216.

〔2〕Tutschke，w.，Math．Nachr.，75（1976），283—298．

〔3〕闻国椿，一阶复方程于多连通园界区域上的积分表示式及其性质，河北师范大学学报（自然科学版），2（1981），130—145．

〔4〕Векуа，И．Н．，广义解析函数，人民教育出版社，1960．

〔5〕闻国椿，关于黎曼—希尔伯特边值问题的奇异情形，北京大学学报（自然科学版），4（1981），1—14．
