

分子格的构造*

刘 强 中

(云南临沧教育学院)

王国俊同志在〔1〕〔2〕中定义了分子格和拓扑分子格,对拓扑分子格的分离性进行了一系列的研究.本文拟对分子格的构造作一研究,并将〔2〕中某些定理进行推广,文中涉及的概念和符号除另有定义者外都按照〔1〕〔2〕.

一、分子格的代数结构

定义1 若 $L = L(\vee, \wedge)$ 是一个完全分配格,有子集 π 符合下列条件:

- ① $0 \notin \pi$;
- ② $a, b \in \pi, a \wedge b \neq 0 \implies a \leq b$ 或 $b \leq a$;
- ③ $a, b, c \in \pi, a \leq c, b \leq c \implies a \wedge b \neq 0$;
- ④ L 中任一非0元可表为 π 中元的并;
- ⑤ 若 π_0 是 π 的全序子集,则 $\vee \{a \mid a \in \pi_0\} \in \pi$.

则称 $L = L(\pi)$ 为关于 π 的拟分子格, π 中元称为 L 的分子或点.

显然,分子格就是具有逆序对合对应的拟分子格.在拟分子格中可象分子格那样定义 A 中的点、 A 的成份、 π^* 等.〔1〕中命题1的各结论全对拟分子格成立.

定义2 若 $L(\pi)$ 是拟分子格, $a, b \in \pi, a \leq b$ 或 $b \leq a$, 则称 a, b 是可比的.

由②知 a, b 可比的充要条件是 $a \wedge b \neq 0$. 显然,可比关系具反身性和对称性,由②③不难推出它也有传递性、故可比关系是 π 中的等价关系.

定义3 若 $L(\pi)$ 是拟分子格, a_0 是 π 的一个可比类,称 $a = a_0 \cup \{0\}$ 为 $L(\pi)$ 的一条支柱, L 的全体支柱组成的集 X 称为 L 的承集.

当 $1 \in \pi$ 时, L 本身是其唯一支柱.

每条支柱是 $\pi \cup \{0\}$ 中最大线性子集.

π^* 中元分属不同支柱.

定义4 若 a 是拟分子格 L 的支柱, $A \in L$, 称 $A_a = \vee \{a \mid a \leq A, a \in a\}$ 为 A 在 a 中的坐标. A 在各支柱中的非0坐标即 A 的成份.

π 中元在其所属支柱中的坐标为其自身,在别的支柱中的坐标为0.

1在各支柱中的坐标为该支柱中最大点,记作 1_a (a 为支柱),不致误解时也可简记作1,当 $a \in a \setminus \{0\}$ 时, $m_a = 1_a$.

定理1 若 L 是拟分子格, I 为任意指标集, $A^i \in L$ ($i \in I$), 则对任意支柱 a , 有

* 1984年2月17日收到.

$$\left(\bigvee_{i \in I} A^i\right)_a = \bigvee_{i \in I} (A^i)_a, \quad \left(\bigwedge_{i \in I} A^i\right)_a = \bigwedge_{i \in I} (A^i)_a.$$

本定理不难由 $\vee$ 、 $\wedge$ 运算的交换, 结合、分配律得到证明.

推论 若 L 是拟分子格, $A, B \in L$, 当且仅当对任何支柱 a 有 $A_a \leq B_a$ 时, $A \leq B$.

若 X 是一个由完备线性序集组成的集, L 是集中各序集的直和, 显然 $\pi = \bigcup_{a \in X} (a \setminus \{0_a\})$

满足条件①—⑤, L 关于 π 构成拟分子格,

定理 2 拟分子格 $L(\pi)$ 可唯一地表为完备线性序集的直和.

证 显然 L 是其各支柱的直和, 若 L 还可表为完备线性序集 a^i ($i \in I$, I 为指标集) 的直和, 则 L 关于 $\pi^1 = \bigcup_{i \in I} (a_i \setminus \{0_{a_i}\})$ 也构成拟分子格, 由 π 的唯一性, $\pi^1 = \pi$, a_i 必是 $L(\pi)$ 的支柱, 故 $L(\pi)$ 的直和表示是唯一的.

若 $L = L(\pi)$ 是分子格, 则也是拟分子格, 可用唯一的方式建立坐标, 记 π 为 L 中有唯一非 1 坐标的元组成的集, L' 为 L 对其逆序 “ $\geq$ ” 构成的格, 若 $\mu \subset L$, 记 $\mu' = \{A' \mid A \in \mu\}$, 显然 L' 是有逆序对合对应的完全分配格.

命题 1 L' 关于 π^{Δ} 构成分子格.

证: π^{Δ} 满足①—⑤的对偶条件:

①' $1 \in \pi^{\Delta}$;

②' 若 $A, B \in \pi^{\Delta}$, $A \vee B \neq 1$, 则 A, B 的非 1 坐标属同一支柱, 故有 $A \geq B$ 或 $B \geq A$;

③' 若 $A, B, C \in \pi^{\Delta}$, $A \geq C$, $B \geq C$, 则 A, B, C 的非 1 坐标属同一支柱, 故 $A \vee B \neq 1$;

④' 若 $K \in L$, $K \neq 1$, 对任一支柱 a , 用 K_a^{Δ} 表在 a 中坐标为 K_a , 别的坐标为 1 的元, 则 $K_a^{\Delta} \in \pi^{\Delta}$, $K = \bigwedge_{a \in X} K_a^{\Delta}$;

⑤' π^{Δ} 中线性子集 π_0^{Δ} 中元的非 1 坐标属同一支柱, 故 $\bigwedge \{A \mid A \in \pi_0^{\Delta}\} \in \pi^{\Delta}$.

命题 2 L' 关于 π' 构成分子格.

不难由对偶性得到证明.

由这两个命题和分子集的唯一性得

定理 3 若 $L(\pi)$ 是分子格, 则 $\pi' = \pi^{\Delta}$, 从而 $a' = \beta^{\Delta}$, 此处 a 是 L 的任一支柱, β^{Δ} 为 π^{Δ} 的一个可比类与 1 的并集, 即在 β 外各支柱中的坐标全为 1 的元组成的集.

推论 若 a, β 是分子格的支柱, $a' = \beta^{\Delta}$, 则 (1) $T(a) = \beta$ 是 L 的承集 X 的一一变换, (2) 若 $x \in a$, 则 $T(x) = (x')_{\beta}$ 是 a 到 β 的逆相似对应.

称 $(a')_{\beta}$ ($a \in a, \beta = T(a)$) 为 a 的对点并记作 ca , 后面将见到此处对点定义是 [1] 中对点的推广.

0 为任何支柱的元, 因而任一极大点都是 0 的对点, 但当支柱 a 被指定时, O_a 的对点 $cO_a = 1_{T(a)}$ 是确定的.

定理 4 若 a 是分子格 L 的支柱, $T(a) = \beta$, $A \in L$, 则 $(A')_{\beta} = cA_a$

证 由 $A = \bigvee_{a \in X} A_a$, 得 $A' = \bigwedge_{a \in X} (A_a)'$, 对任何 $a \in X$, $(A_a)'$ 是在 $T(a)$ 中的坐标为 cA_a ,

别的坐标为 1 的元, 由定理 1, $(A')_\beta = cA_\alpha$.

定理 5 若 α, β 是分子格 L 的支柱, $T(\alpha) = \beta, \alpha \in \alpha$, 则 $T(\beta) = \alpha, c(ca) = a$.

证 设 $T(\beta) = \gamma$, 当 $a \neq 0$ 时, $(a')_\xi = \begin{cases} ca & (\xi = \beta) \\ 1_\xi & (\xi \neq \beta) \end{cases}$, 由定理 4, $[(a')']_\eta = \begin{cases} c(ca) & (\eta = \gamma) \\ 0 & (\eta \neq \gamma) \end{cases}$, 但 $(a')' = a \neq 0$, 故 $\gamma = \alpha, c(ca) = a, c(c0) = c1_\xi = 0$ 显然成立.

定理 6 分子格 L 为正统分子格的充要条件是 $T = E$ (E 表 X 到 X 的恒等变换).

证 充分性: 若 $T = E, A, B \in L, A \wedge B = 0$, 则对任意 $\xi \in X$, 当 $A_\xi \neq 0$ 时 $B_\xi = 0, (B')_\xi = 1_\xi$, 故 $A \leq B', L$ 是正统分子格.

必要性: 若 L 是正统分子格, $0 \neq a \in \alpha \in X$, 令 $B = \bigvee_{\xi \neq \alpha} 1_\xi$, 则 $a \wedge B = 0, B \leq a',$ 当 $\xi \neq \alpha$ 时 $(a')_\xi = 1_\xi$, 故 $T(\alpha) = \alpha, T = E$.

推论 (1) 在正统分子格中, $ca = a' \wedge m_\alpha$; (2) 设 L 是拟分子格, 若在 L 中可定义逆序对合对应使 L 成正统分子格, 则此逆序对合对应是唯一确定的.

设 X 是由完备线性格序集组成的集, 若存在 X 的自逆变换 $T = T^{-1}$, 使每个 $\alpha \in X$ 与 $T(\alpha)$ 为逆相似, 则可在各完备线性序集的直和中定义逆序对合对应和分子集使之构成分子格, 由此易举出非正统分子格的例子.

二、有关拓扑分子格的分离性的几个定理

掌握分子格的代数结构并推广对点概念后, 可证明 [2] 中定理 3.3, 3.10, 3.11, 3.15 和 4.8, 4.9, 4.11 都对一般拓扑分子格成立, 而限于拓扑正统分子格, 3.3 的证明和 [2] 完全一样, 现证 3.10:

为使拓扑分子格 $L(\pi)$ 是 T_1 的, 必须且只须 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的且当任意 $a, b \in \pi, a \wedge b = 0$ 时有开元 U 使 $a \leq U, b \wedge U = 0$.

证明必要性: 若 $L(\pi)$ 是 T_1 的, 则也是 T_{-1} 的. 若 $a, b \in \pi, a \wedge b = 0$, 则 a, b 属不同支柱. 令 $a \in \alpha, b \in \beta, 1_{T(\beta)}$ 是闭元, 开元 $U = (1_{T(\beta)})'$ 在 β 中的坐标为 0, 在 α 中的坐标为 1_α , 故 $a \leq U, b \wedge U = 0$.

再证充分性: 若定理条件成立, $a, b \in \pi, a \not\leq b$, 则有 $a > b$ 或 $a \wedge b = 0$, 前种情况由 T_{-1} 性 a 有远域含 b , 后种情况 a, b 分属不同支柱 $\alpha, \beta, 1_{T(\alpha)} \wedge 1_{T(\beta)} = 0$, 有开元 U 使 $1_{T(\alpha)} \leq U, 1_{T(\beta)} \wedge U = 0, P = U'$ 在 α 中的坐标为 0, 在 β 中的坐标为 1_β , 故 P 是 a 的含 b 的远域.

作为 3.3 和 3.10 的推论, 3.11 也可推广到一般拓扑分子格中.

定理 3.15 不但可推广到一般拓扑分子格, 还可加强为 (按本文定理编号, 定理 8 同)

定理 7 若 $L(\pi)$ 是拓扑分子格, $\tilde{\pi}$ 为 π^* 中能表作较小元之并的点的集, 为使 $L(\pi)$ 是 T_2 的, 必须且只需对任意 $a, b \in \pi \setminus \tilde{\pi}$, 当 $a \wedge b = 0$ 时有开元 U, V 满足 $a \leq U, b \leq V, U \wedge V = 0$.

证 充分性: 若定理条件成立, $a, b \in \pi$ 且 $a \wedge b = 0$, 当 a 为原子时, 令 $a^* = 1_{T(\alpha)} \in \pi^* \setminus \tilde{\pi}$,

(a 为 a 所属支柱)。当 a 非原子时 $T(a) \setminus \{1_{T(a)}\}$ 中必有点 $a^* > ca$, 同样可得 $b^* \in \pi \setminus \tilde{\pi}$ 使 $b^* \leq cb$, $a^* \wedge b^* = 0$, 有开元 U , U 使 $a^* \leq U$ 、 $b^* \leq V$ 、 $U \wedge V = 0$, U', V' 分别是 a, b 的远域, $U' \vee V' = 1$ 。

必要性: 当 $a, b \in \pi \setminus \pi^*$ 时证法同 [2], 当 $a(b) \in \pi^* \setminus \tilde{\pi}$ 时用 $T(a)$ ($T(b)$) 中的原子代替 ca (cb) 即可。

参照上面的方法对 [2] 中有关拓扑正统分子格的 T^* 分离性的几个定理的证法作适当修改, 便可把它们改为一般拓扑分子格中的相应定理, 但定理 4.5 和 4.6 的结论也有所改变, 当合并改为

定理 8 为使拓扑分子格 $L(\pi)$ 是 T_0^* 的, 必须且只须下面两个条件成立:

- (1) 当 $a, b \in \pi^*$ 且 $a \wedge b = 0$ 时, 有含 a 的开元 U_a 或闭元 P_a 与 b 不相交。
- (2) 对任一 $a \in \pi \setminus \pi^*$, a 是某开元或闭元的成份。

对定理 4.8 和 4.11, 只须改变证法, 结论不变, 定理 4.9 则证法也不必改动。

参 考 文 献

- [1] 王国俊, 拓扑分子格 (I) 科学通报, 28 (1983), 18, 1089—1091.
- [2] 王国俊, 拓扑分子格的分离公理, 数学研究与评论, 3 (1983), 2, 9—16.

On the Structure of Molecular Lattices

Liu Qiang-zhong

Abstract

In this paper, some results concerning structure of molecular lattices are given. We proved that every molecular lattice can be expressed as a direct sum of linear sets. Moreover, we show that theorems 3.3, 3.10, 3.11, 3.15, 4.8, 4.9 and 4.11 of [2] are valid for general topological molecular lattices.