强p除环上方阵的酉相似理论(Ⅰ)*

屠伯壎
(复旦大学)

§1 引　言

除环上的矩阵论是个比较复杂的问题。由于除环的非交换性以及体上按Dieudonné意义下的行列式的不完善，影响了该理论之进展，故还未见到较为系统的理论**. 最近谢邦杰连续著文[3]~[9]，详细研究了体上方阵的相似标准形及其应用. 本文作者也曾应用〔3〕中结论解决了方阵分解为两个自共轭阵乘积的问题[10].

本文讨论一类被称为强p除环Ω上方阵的酉相似问题. 建立了Ω上的镜象阵理论，得出了Ω上方阵的Schmidt分解；由此推导出象Ω上矩阵的广义逆、非异阵的Cholesky分解的存在性等有用结论. 本文还以镜象阵为工具，讨论了Ω上任一方阵及自共轭阵的酉相似问题，并应用自共轭阵酉相似的结论，避免了复杂的除环上方阵的特征值理论，得出了镜象阵酉相似于对角阵的具体形状.

在续文(Ⅱ)中，将用一些特殊的新方法，讨论一类被称为加强p除环Ω上自共轭阵酉相似于对角阵的问题. 以此为基础，导出了Ω上正定自共轭阵的一串基本结论.

本文以下所引用的关于除环上的一些矩阵理论，例如矩阵的秩、矩阵的初等变换以及Dieudonné意义下的行列式的一些基本结论，均取自〔2〕的第三章，以及不再另作说明.

§2 强p除环上的镜象阵理论及其应用

在〔11〕中，作者引进了p除环的概念. 所谓p除环Ω，指的是具有对合反自同构σ: $a\to\sigma(a)=\overline{a}$，$\overline{(\overline{a})}=a$的除环，且满足“正性条件”：即对$\Omega$中任意$l$个非零元素$a_1, a_2, \cdots, a_l$，恒有：

$$\sum_{i=1}^{l} a_i\sigma(a_i)\neq o \quad (\text{或} \sum_{i=1}^{l} a_i\overline{a_i}\neq o), \tag{1}$$

其中o是加群$\{\Omega, +\}$的零元.

由正性条件(1)，易知成立下面的

命题1　Ω的特征数等于0.

证　因若对Ω中的任意非零元a，成立$qa=a+a+\cdots+a=o$，则$qa\overline{a}=a\overline{a}+a\overline{a}+\cdots+a\overline{a}=o$，此与(1)相矛盾，命题1正确.

* 1985年8月9日收到. ** 〔1〕、〔2〕中有较多好的结果.

今进一步引进强 p 除环的概念.

定义 设Ω是一个 p 除环，Z是Ω的中心，记

$$\mathrm{R}=\{a\mid\sigma(a)=a,\ a\in\Omega\},\ N(a)=a\sigma(a)=a\overline{a},$$

如果下列两个条件被满足，则称Ω为强 p 除环：

(i) $\mathrm{R}\subsetneq \mathrm{Z}$

(ii) 对Ω中任意 l 个非零元素 a_1, a_2, …, a_l, 方程 $x^2-\sum_{i=1}^{l}N(a_i)=0$ 在Ω中有且只有两个解.

定义 设Ω是强 p 除环，且Ω存在子域Σ是Z的代数封闭扩张，则称Ω为加强 p 除环.

例如，实数域上的四元数除环是加强 p 除环.

以下均设Ω是强 p 除环，不再另作说明. 易知 $\sum_{i=1}^{l}a_i\overline{a}_i=o$ 的充分必要条件是，$a_i=o$，$i=1,2,\cdots l$. 又易知成立下列事实：

$$N(a)\in\mathrm{R},\ \forall a\in\Omega, \tag{2}$$

$$N(ab)=N(a)N(b),\ \forall a,b\in\Omega. \tag{3}$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是Ω上的 $m\times n$ 阵，记 $\overline{A}=(\sigma(a_{ij}))_{m\times n}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，令 A' 为 A 的转置阵，则易知 $(\overline{A'})=(\overline{A})'$，$(\overline{AB})'=\overline{B}'\,\overline{A}'$.

对Ω上的 n 维列向量：$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，记 $N(a)=\overline{a}'a\ \left(=\sum_{i=1}^{n}N(a_i)\right)$，则由 (2) 式可知，$N(a)\in\mathrm{R}$. 又设 ξ 是 $x^2-N(a)=0$ 在Ω中的一个根，并记为 $\xi=\|a\|$，则 $-\|a\|$ 是 $x^2-N(a)=0$ 在Ω中的另一个根.

命题2 $\|a\|\in\mathrm{R}$.

证 由于 $N(a)=\overline{N(a)}=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{a}\|$，故 $\|\overline{a}\|$ 是 $x^2-N(a)=0$ 的一个根，因此 $\|\overline{a}\|=\|a\|$，或者 $\|\overline{a}\|=-\|a\|$. 今若后一式成立，则因 $N(a)=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{a}\|=-\|a\|\cdot\|\overline{a}\|$，$\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{a_i}+\|a\|\cdot\|\overline{a}\|=0$，此与正性条件 (1) 相矛盾，故只能成立前一式，于是 $\|a\|\in\mathrm{R}$. ■

设 e 是Ω的单位元，a 是Ω上的 n 维列向量，如果 $N(a)=e$，则称 a 为单位列向量.

定义 称满足 $A\overline{A}'=I_n$ 的Ω上的 $n\times n$ 阵 A 为酉阵. 称满足 $A=\overline{A}'$ 的阵 A 为自共轭阵. 此处 I_n 为Ω上的单位阵.

定义 称 $H=I_n-2u\overline{u}'$ 为（Ω上的）镜象阵，其中 u 是Ω上的 n 维单位列向量.

由(2)式，易知成立

命题3 镜象阵是酉阵、自共轭阵.

设Ω* 是Ω的乘法群，C是Ω* 的换位子群，ν：$a\to a\mathrm{C}$ 是Ω* 映到商群Ω*/C上的同态满射，以 $\det A$ 表示Ω上非奇异阵 A 在Dieudonné 意义下的行列式，并定义 $\det a=\nu(a)$，$a\in\Omega^*$，则有

命题4 设 $N(u)=e$，则 $\det(I_n-2u\overline{u}')=-\mathrm{C}$.

证 由行列式的第二降阶定理[12]，可得

$$\det(I_n-2u\overline{u}')=\det I_n\cdot\det(e-2\overline{u}'I_1^{-1}u)\ (\det e)^{-1}=\det(e-2N(u))=\det(-e)$$

$= -C$.

定理1 设α与β是Ω上两个不同的n维列向量，且满足：（i）$N(\alpha)=N(\beta)$；（ii）$\bar{\alpha}'\beta\in R$，则必存在（Ω上的）镜象阵H，使$H\alpha=\beta$.

证 因为$\alpha-\beta\neq 0$，故由正性条件（1）可知，$\|\alpha-\beta\|\neq 0$，作Ω上的n维列向量：$u=(\alpha-\beta)\|\alpha-\beta\|^{-1}$则由命题2，$N(u)=e$，且上式可改写为：

$$\beta-\alpha=-u\|\alpha-\beta\|, \tag{4}$$

又

$$\|\alpha-\beta\|^2=N(\alpha-\beta)=(\bar{\alpha}'-\bar{\beta}')(\alpha-\beta)=\bar{\alpha}'\alpha+\bar{\beta}'\beta-\bar{\beta}'\alpha-\bar{\alpha}'\beta, \tag{5}$$

若记

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix};\quad \beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix},$$

则由假设$\bar{\alpha}'\beta=\overline{(\bar{\alpha}'\beta)}=\overline{\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_ib_i\right)}=\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_ia_i=\bar{\beta}'\alpha$，于是（5）式化为$\|\alpha-\beta\|^2=2\overline{(\alpha'-\beta')}\alpha$，由命题2，上式可改写为：

$$\|\alpha-\beta\|=2\overline{(\alpha-\beta)'}\|\alpha-\beta\|^{-1}\alpha=2\bar{u}'\alpha, \tag{6}$$

由（5）与（6）式，并经整理后即得$\beta=(I_n-2u\bar{u}')\alpha=H\alpha$. ∎

例1 对实（数域上的）四元数除环上的3维列向量

$$\alpha=\begin{bmatrix}i\\k\\0\end{bmatrix};\quad \beta=\begin{bmatrix}i\\0\\j\end{bmatrix},$$

由于$\alpha\neq\beta$，且$N(\alpha)=N(\beta)=2$，$\bar{\alpha}'\beta=1$，故可作单位列向量：$u=(\alpha-\beta)\|\alpha-\beta\|^{-1}=\begin{bmatrix}0\\k\\-j\end{bmatrix}$ $\|\alpha-\beta\|^{-1}$，又因$\|\alpha-\beta\|^2=2$，故 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&i\\0&-i&0\end{bmatrix}$，且$H\alpha=\beta$.

定理2 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是Ω上$m\times n$阵，$m\geq n$，则必

$$A=Q\begin{pmatrix}U\\O\end{pmatrix},$$

其中Q是Ω上的$m\times m$酉阵，O是Ω上的$(m-n)\times n$零矩阵，而U是Ω上的$n\times n$上三角阵.

证 将A按它的列分块：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix}$，$i=1,2,\cdots,n$， （i）如果$a_{11}=0$，而$a_{21}$，…，$a_{m1}$中至少有一个非零元，则作$m$维列向量：

$$\beta_1=\begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中$b_{11}=a_{11}N(a_{11})^{-1}N(\alpha_1)$，则$\alpha_1\neq\beta_1$；$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$，并且$\overline{\alpha}'\beta_1=N(\alpha_1)\in R$，故由定理1，存在$\Omega$上的$m\times m$镜象阵$H_1$，使

$$H_1\alpha_1=\begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 于是H_1A=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}，\tag{8}$$

其中A_1是Ω上的$(m-1)\times(n-1)$阵.

（ii）如果$a_{11}=0$，但a_{21}，…，a_{m1}中至少有一个非零元，则取 $\beta_1=\begin{pmatrix} \|\alpha_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，于是仍有$\alpha_1\neq\beta_1$；$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$，且$\overline{\alpha}'\beta_1=0\in R$，于是由定理1，又可得到（8）式的形状.

综上所述，对任一A，恒成立（8）式．于是由归纳法假设，必存在$(m-1)\times(m-1)$酉阵Q_1以及$(n-1)\times(n-1)$上三角阵U_1，使

$$A_1=Q_1\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}，\tag{9}$$

令

$$Q=H\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}，\quad U=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$$

则Q是$m\times m$酉阵，U是$n\times n$上三角阵，且由（9）式以及命题3，（8）式可以化为（7）式. ■

定理3　设A是Ω上的秩为r的$m\times n$阵，则必存在Ω上的$m\times m$酉阵Q以及$n\times n$酉阵V，使

$$A=Q\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{V}'，\tag{10}$$

其中N为Ω上的$r\times r$非奇异阵．从而，Ω上的矩阵方程组：

$$AXA=A，\ XAX=X，\ AX=\overline{X}'\overline{A}'，\ XA=\overline{A}'\overline{X}'\tag{11}$$

（在Ω上）必有解.

证　因为A的秩为r，故存在Ω上的$m\times m$非奇异阵P以及Ω上的$n\times n$非奇异阵T，使

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T，\tag{12}$$

由定理2，可设：

$$P=QU；\ \overline{T}'=VS，\tag{13}$$

其中 Q 与 V 分别是 Ω 上的 $m\times m$ 酉阵与 $n\times n$ 酉阵；U 与 S 显然分别是 Ω 上的 $m\times m$ 非奇异上三角阵与 $n\times n$ 非奇异上三角阵．作分块：

$$U=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix};\quad \overline{S}'=\begin{pmatrix} L_1 & O \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中 U_1 与 L_1 分别是 $r\times r$ 上三角阵与下三角阵，它们显然都是非奇异阵．由（13）式与（14）式，（12）式可改写为：

$$A=Q\begin{pmatrix} R_1L_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{V}',$$

记 $N=RL$，则 N 亦是 $r\times r$ 非奇异阵，且由上式即得（10）式，又容易验证：Ω 上的 $n\times n$ 阵：

$$X=V\begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{Q}', \tag{15}$$

是矩阵方程组（11）的解． ∎

定义 Ω 上的 $n\times n$ 阵 A 称为正定自共轭阵，如果 $A=\overline{B}'B$，而其中 B 是 Ω 上的秩为 n 的 $m\times n$ 阵．

由上面的定义以及定理 2，可得推广的Cholesky分解定理，即

定理 4 设 A 是 Ω 上的正定自共轭阵，则

$$A=\overline{U}'U, \tag{16}$$

其中 U 是 Ω 上的非奇异上三角阵．

证 设 A 是 $n\times n$ 阵，由定义，$A=\overline{B}'B$，而 B 是秩为 n 的 $m\times n$ 阵，由于 B 的左行秩等于 B 的右列秩等于 n，因而必有 $m\geq n$，于是由定理 2，$B=Q\begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}$，因为 $\begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}$ 的左行秩为 n，故 U 必须是 $n\times n$ 非奇异阵，所以

$$A=(\overline{U}',\ O)\overline{Q}'Q\begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}=\overline{U}'U.$$ ∎

§3 任意方阵与自共轭阵的酉相似理论

定义 称 Ω 上的 $n\times n$ 阵：

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3,n-1} & h_{3n} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ & & & & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

为上Hessenberg阵

定义 设 A 与 B 都是 Ω 上的方阵，若存在 Ω 上酉阵 Q，使 $\overline{Q}'AQ=B$，则称 A 与 B 酉相似，或称 A 酉相似于 B．

定理 5 Ω 上任何方阵必酉相似于上Hesenberg阵．

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 Ω 上的 $n\times n$ 阵，把 A 如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ \alpha_1 & A_1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中α_1与β_1分别是 $n-1$ 维列向量与 $n-1$ 维行向量，而A_1是（$n-1$）×（$n-1$）阵.

与定理 2 的证法完全相同，在$\alpha_1\neq 0$ 的条件下，必可找到Ω上的（$n-1$）×（$n-1$）镜象阵H_1，使 $\overline{H}_1'\alpha_1=H_1\alpha_1=\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，记$Q_1=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}$，则

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \beta_1 H_1 \\ \hline c_1 & \\ 0 & \overline{H}_1' A_1 H_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right] \tag{18}$$

将（18）式右端重新分块如下：

$$\overline{Q}_1' AQ_1=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & b_{11} & B_2 \\ c_1 & b_{22} & \\ \hline 0 & \alpha_2 & A_2 \end{array}\right], \tag{19}$$

其中α_2是 $n-2$ 维列向量，B_2是 $2\times$（$n-2$）阵，而A_2是（$n-2$）×（$n-2$）阵.

仿照导出（18）式的方法，在$\alpha_2\neq 0$ 的条件下，又可找到Ω上的 $n\times n$ 酉阵Q_2，使（19）式化为：

$$\overline{Q}_2'\overline{Q}_1' AQ_1Q_2=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & b_{12} & \\ c_1 & b_{22} & B_3 \\ 0 & c_2 & \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A_3 \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

用上述那种方法 s 次（$s\leqslant n$），就可找到Ω上的 $n\times n$ 酉阵Q_1，Q_2，…，Q_s，使

$$\overline{Q}_s'\cdots\overline{Q}_2'\overline{Q}_1' AQ_1Q_2\cdots Q_s=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ c_1 & b_{22} & & * \\ & c_2 & \ddots & \\ & \bigcirc & \ddots & \ddots \\ & & c_{n-1} & b_{nn} \end{bmatrix},$$

记 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_s$，则 Q 是Ω上的酉阵，而上式即为欲求证之结论.

在上述过程中如出现$\alpha_i=0$ 的情形，例如$\alpha_1=0$，此时 A 就是下面的形状：

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \beta_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right],$$

则第 1 列不必加以讨论（此时可少求一次酉阵），而直接对 A_1 运用上述方法．当 a_i（$i \geq 2$）中有零向量时也仿此进行讨论． ■

定理 5 的一个有趣特例是，当 A 是 Ω 上的 $n \times n$ 自共轭阵时，若记

$$\overline{Q'}AQ = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ a_1 & a_2 & b_3 & & * \\ & c_2 & a & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1}, & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

则由 $\overline{Q'}AQ = \overline{Q'}\,\overline{A'}Q$ 可知，上式右端打 * 号处的元素全是零元，并且：

$$a_i = \overline{a_i},\quad c_j = \overline{b_j},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

故得下面的

定理 6　Ω 上的任一 $n \times n$ 自共轭阵必酉相似于下面的"三对角阵"：

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ \overline{b_1} & a_2 & b_2 & & \\ & \overline{b_2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & \overline{b_{n-1}} & a_n \end{bmatrix},$$

且 $a_i \in \mathrm{R}$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$．

由定理 6 可得关于镜象阵的酉相似标准形的一个有趣结论，即

定理 7　设 $H = I_n - 2u\overline{u'}$，$u$ 是 Ω 上的 n 维单位列向量，则必存在 Ω 上的 $n \times n$ 酉阵 Q，使

$$\overline{Q'}HQ = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

证　由定理 6，存在 Ω 上 $n \times n$ 酉阵 Q_1，使

$$\overline{Q_1'}u\overline{u}'Q_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ \overline{b_1} & a_2 & b_2 & & \\ & \overline{b_2} & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & \overline{b_{n-1}} & a_n \end{bmatrix}, \tag{21}$$

记

$$\overline{Q_1'}u = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{22}$$

则由（21）式可得

$$a_i = v_i\overline{v_i} \in \mathrm{R}；\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{23}$$

今证v_i不能全为零元．因若$v_i = 0$，$i = 1,2,\cdots,n$，则由（22）式推得$u = 0$，故$N(u) = 0$，但由于假设$N(u) = e$，此为矛盾．故不妨设$v_1 \neq 0$，于是$a_1 \neq 0$．

又因$u\overline{u'}$的秩为1，故$\overline{Q'}u\overline{u'}Q$的秩也为1，因而（21）式右端方阵的秩是1，因此容易推得：

$$b_2 = \cdots = b_{n-1} = 0；\quad a_3 = \cdots = a_n = 0，$$

所以（21）式简化为

$$\overline{Q_1'}u\overline{u'}Q_1 = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & O \\ \overline{b_1} & a_2 & \\ \hline O & & O \end{array}\right) \tag{24}$$

于是

$$\overline{Q_1'}(I_n - 2u\overline{u'})Q_1 = \left(\begin{array}{cc|c} e-2a_1 & -2b_1 & O \\ -2\overline{b_1} & e-2a_2 & \\ \hline O & & \Sigma_{n-2} \end{array}\right) \tag{25}$$

由于（25）左端方阵是酉阵，故

$$\begin{pmatrix} e-2a_1 & -2b_1 \\ -2\overline{b_1} & e-2a_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

是酉阵，于是可得

$$(e-2a_1)^2 + 4b_1\overline{b_1} = e；$$
$$4\overline{b_1}b_1 + (e-2a_2)^2 = e，$$

由命题1，上两式可简化为

$$b_1\overline{b_1} = a_1 - a_1^2； \tag{27}$$
$$\overline{b_1}b_1 = a_2 - a_2^2 \tag{28}$$

又由于式子 $\begin{pmatrix} e & 0 \\ -\overline{b_1}a_1^{-1} & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{b_1} & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 - a_1^{-1}\overline{b_1}b_1 \end{pmatrix}$ 右端方阵之秩仍为1，故必有：

$$a_2 = a_1^{-1}\overline{b_1}b_1, \tag{29}$$

所以：

（i）当$b_1 = 0$时，则$a_2 = 0$，此时由（27）式可知，$a_1 = e$，于是（25）式即是（20）式（此时取$Q = Q_1$）；

（ii）当$b_1 \neq 0$，$a_2 \neq 0$，于是由（29）式（28）式可化为$a_1a_2 = a_2 - a_2^2$，也即

$$a_2 = e - a_1 \ . \tag{30}$$

由（30）式，又可得：$a_2 - a_2^2 = a_1 - a_1^2$，于是由（28）与（29）式，即得重要关系式：

$$\overline{b_1} b_1 = b_1 \overline{b_1} \ . \tag{31}$$

另外，可把（27）式写成重要关系式：

$$\overline{b_1} b_1 + a_1^2 = a_1 \ . \tag{32}$$

又由（23）式可得

$$a_1 = \|v_1\|^2, \quad \|v_1\| \neq 0 \ . \tag{33}$$

作Ω上的 2 × 2 阵：

$$P_2 = \begin{pmatrix} a_1 \|v_1\|^{-1} & -b_1 \|v_1\|^{-1} \\ \overline{b_1} \|v_1\|^{-1} & a_1 \|v_1\|^{-1} \end{pmatrix} \ ,$$

则由（30）、（31）、（32）、（33）诸式容易验证：P_2是酉阵．再应用（29）、（30）、（31）、（32）、（33）诸式，可以算得．

$$\overline{P_2'} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & a_2 \end{pmatrix} P_2 = \overline{P_2'} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & -a_1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

作Ω上 $n \times n$ 阵 $P = \begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & \Sigma_{n-2} \end{pmatrix}$，并记 $Q = Q_1 P$，则 Q 是酉阵，且由（24）式与（34）式即得$\overline{Q'} u \overline{u'} Q = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，于是$\overline{Q'} HQ = \overline{Q'}(I_n - 2u\overline{u'})Q = \begin{pmatrix} -e & O \\ O & I_{n-1} \end{pmatrix}$． ■

注1　定理7是在较弱条件下（即不假定Ω存在Z的代数封闭扩张Σ作为Ω的子域）得出的，它避免了复杂的除环上方阵的特征值理论，且它对讨论强 p 除环上方阵的特征值理论及酉相似理论显然是有用的．

注2　定理5对强 p 除环上的矩阵方程有很多应用（将在另外一文中加以讨论）．

定义　称Ω上的$n \times n$ 阵 A 为斜自共轭阵，如果$\overline{A'} = -A$．

由定理5及斜自共轭阵的定义显然可得．

定理8　Ω上的任一斜自共轭阵必酉相似于下面的“三对角阵”：

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ -\overline{b_1} & a_2 & b_2 & & \\ & -\overline{b_2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & -\overline{b_{n-1}} & a_n \end{bmatrix} ,$$

并且$\overline{a_i} + a_i = 0$， $i = 1, 2, \cdots, n$．

参 考 文 献

〔1〕P. M. Cohn, The similarity reduction of matrices over a skew field, Math Zeit., Bd. 132(1973), s. 151～163.

〔2〕华罗庚、万哲先，典型群（1963），上海科学技术出版社．

〔3〕谢邦杰，环与体上的矩阵与两类广义Jordan形式，吉林大学学报（自然科学版），1(1978)，21～46．

〔4〕谢邦杰，体上矩阵的有理简化形式与Jordan形式的唯一性问题，同上，1(1978)，107～116．
〔5〕谢邦杰，体上特征矩阵的简化形式的唯一性定理，同上，1(1979)，1～9．
〔6〕谢邦杰，体上矩阵的法式与弱法式存在定理，数学学报，3(1980)，398～410．
〔7〕谢邦杰，体上矩阵的特征根与标准形的应用，同上，4(1980)，521～533．
〔8〕谢邦杰，自共轭四元数矩阵的行列式展开定理及其应用，同上，5(1980)，668～683．
〔9〕谢邦杰，Hadamard定理在四元数体上的推广，中国科学，数学专辑，Ⅰ(1979)，88～93.
〔10〕屠伯埙，关于矩阵分解为两个自共轭阵的乘积，复旦学报（自然科学版）1(1986)，39—44.
〔11〕屠伯埙，p除环上矩阵的广义逆，数学学报，29:2(1986)，246—248．
〔12〕屠伯埙，Hadmard定理在四元数体上的改进，数学学报，30:1(1987)，120—124.

Unitary Similarity Theory of Matrices over the Strong p-Division Ring (Ⅰ)

Tu Boxun

(Fudan University)

Abstract

Is this paper, the elementary reflexive marrix theory over the socalled strong p division ring Ω is given, by using this theory, many important matrix decompositions in the ordinary complex matrix theory (*e.g.*, Schmidt decomposition, Cholesky decomposition, unitary equivalent decomposition,) are generalized to matrices over Ω, and the theory that matrix unitary similar to Hessenberg matrix is established.