关 于 幂 数 的 几 个 问 题*

肖　戎

（国防科技大学）

S．W．Golomb 在1970年于〔1〕中给出了幂数的概念．正整数 n 若满足 $p|n$ 则 $p^2|n$，此处 p 为素数，则 n 叫做一个幂数．

S．W．Golomb 考虑了连续幂数的问题．显然4个连续整数不可能为幂数，因为其中之一必为 $2(2b-1)$ 形状．对两个连续幂数问题，他证明了，若其中之一为完全平方数，则可通过pell 方程的构造出来．并且，S．W．Golomb 在〔1〕中指出，对连续奇幂数仅能给出的一对为25、27．

在〔1〕中，S．W．Golomb 提出了下述两个问题及一个猜想：

1．是否存在 $4k-1$，$4k+1$ 形的连续奇幂数？

2．除 $23^3=12167$，$2^3\cdot3^2\cdot13^2=12168$ 外，是否还存在都不为完全平方数的连续幂数？

3．S．W．Golomb 猜想：6不能表为两幂数之差．

1981年，W．A．Sentance 在〔2〕中给出无限对连续奇幂数，但所给例子都仅为 $4k+1$，$4k+3$ 形状．Andrzej Makowski 在1972年于〔3〕中指出：有无限多个 $p\equiv1(\mathrm{mod}\,8)$ 可以表为两个幂数之差．但这些工作均没有解决S．W．Golomb 提出的上述问题和猜想．

本文完全解决了S．W．Golomb 提出的上述问题和猜想，证明了：

1．存在无限多对形如 $4k-1$，$4k+1$ 的连续奇幂数．

2．存在无限多对都不为完全平方数的连续幂数．

3．S．W．Golomb 猜想不成立．即：6可以表为两个幂数之差．

定理 1　若 $d=a(a+2)$，$a\equiv-1(\mathrm{mod}\,4)$，$a>0$．则：$x^2-dy^2=1$ 有无限多组解 x，y 使得 $x\equiv0(\mathrm{mod}\,4)$，$y\equiv0(\mathrm{mod}\,d)$．

证　因 $d=a(a-2)$．故 $x^2-dy^2=1$ 之基本解为 $a+1+\sqrt{d}$．取 $n=2a(a+2)t+a(a+2)$，$t=0,1,2,\cdots$，则 $x_n+y_n\sqrt{d}=(a-1-\sqrt{d})^n$ 即满足 $x_n\equiv0(\mathrm{mod}\,4)$，及 $y_n\equiv0(\mathrm{mod}\,d)$．

事实上：$x_n=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\binom{n}{2i}d^i(a+1)^{n-2i}$，$y_n=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\binom{n}{2i+1}d^i(a+1)^{n-1-2i}$

$\equiv n(a+1)^{n-1}\equiv0\ (\mathrm{mod}\ d)$，而 $a\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，$n\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，故 $x_n\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 4)$．

定理 2　存在无限多对形如 $4k-1$，$4k-1$ 的连续奇幂数．

* 1984年1月19日收到．

证 由定理 1 知，$x^2-dy^2=1$ 有无限多组$x\equiv 0(\bmod 4)$，$y\equiv 0(\bmod\ d)$之解．故有$(x-1)(x+1)=dy^2=d^3y_1^2$．而此时$(x+1,\ x-1)=1$．故$x-1$，$x+1$ 都为幂数．且又因$x\equiv 0(\bmod 4)$，故$x-1$，$x+1$ 为$4k-1$，$4k+1$ 形连续幂数．由$x^2-dy^2=1$ 之如此解的的无限性故得知如此连续幂数的无限性． □

显然有以下推论：

推论 1 2 可以表为两幂数之差．且表法无限．

对于如定理 1 中所给定方程，由定理 1，定理 2 可得无限多对连续奇幂数．然而，通过d之不同选择，我们又得到一大类如此方程．

利用上述结论，在此我们给出一组$4k-1$，$4k+1$ 形连续奇幂数．

在定理 1 中取$a=3$，则$d=15$．考虑方程$x^2-15y^2=1$，其基本解为$4+\sqrt{15}$．令$n=15$．考虑$x_{15}+y_{15}\sqrt{15}=(4+\sqrt{15})^{15}$，则得$x_{15}=13837575261124\equiv 0\ (\bmod\ 4)$．故$x_{15}-1=13837575261123=3^5\cdot 71^2\cdot 3361^2$，$x_{15}-1=13837575261125=5^3\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 29^2\cdot 149^2$ 为两个形如$4k-1$，$4k+1$ 的连续奇幂数．

连续幂数之存在性即为不定方程$x^2u^3+1=y^2v^3$之解x，y，u，v 的存在性．而对应于两者都不为完全平方即要求u、v 不为完全平方．特别，若取$u=23$，$v=2$，则有：

引理 1[1] $23^3x^2-2^3y^2+1=0$ 有一解$x=1$，$y=39$．即$x^2-46y^2=-23$有一解$x=23^2$，$y=78$．

定理 3 存在无限多对都不为完全平方数的连续幂数．

证 显然，若方程$x^2-46y^2=-23$有解$x_1\equiv 0(\bmod 23^2)$，$y_1\equiv 0(\bmod 2)$，则：方程$23^3x^2-2^3y^2=-1$ 有解$x_1/23^2$，$y_1/2$．故只需证明$x^2-46y^2=-23$ 有无限多对$x\equiv 0(\bmod 23^2)$，$y\equiv 0(\bmod 2)$ 之解即可．

$x^2-46y^2=1$ 之基本解为$24335+3588\sqrt{46}$[4]，且由[5]知$x^2-46y^2=-23$之解只有一个结合类，故其所有解为 $x_n+y_n\sqrt{46}=(23^2+78\sqrt{46})(24335+3588\sqrt{46})^n$ 令 $u_n+v_n\sqrt{46}=(24335+3588\sqrt{46})^n$，则显然有$v_n\equiv 0(\bmod 2\cdot 23)$，$n\neq 0$．故对任何$n\neq 0$有$x_n\equiv 0(\bmod 23^2)$，$y_n\equiv 0(\bmod 2)$．

特别地，我们给出另外一对都不为完全平方数的连续幂数．

在定理 3 之证明中若取$n=1$，此时有：$x_1=25746959$，$y_1=3796182$．故$x_1/23^2=48671$，$y_1/2=1898091$ 为方程$23^3x^2-2^3y^2=-1$ 之解．从而 $2882199555424 7=23^3\cdot 7^2\cdot 17^2\cdot 409^2$，$28821995554248=2^3\cdot 3^4\cdot 13^2\cdot 16223^2$ 为一对都不为完全平方数的连续幂数．

定理 4 任给奇素数P，则$2P$ 可表为两幂数之差$\Longleftrightarrow$不定方程$x^2-d^3y^2=P^2$对某$d>1$，d无平方因子，存在$2\mid x$，$P\nmid x$ 之解．

证 充分性：若$x^2-P^2=d^3y^2$，$2\mid x$，$P\nmid x$．则$(x-P,\ x+P)=1$．故$x-P$，$x+P$ 为两幂数．即$2P$ 可表为两幂数之差．

必要性：若$2P$ 表为两幂数之差，就有x，使$x-P$、$x+P$ 为两幂数，故$x^2-P^2=d^3y^2$对某$d>0$，d无平方因子成立．

若$2\nmid x$，则$x-P$，$x+P$ 中必有其一为$\equiv 2(\bmod 4)$．故不为幂数，矛盾．

若$P\mid x$，则$(x-P,\ x+P)=P$．因而有：$P^2\mid x-P$，$P^2\mid x+P$．但d 无平方因子，故$P\mid y$ 且有$\frac{x-P}{P}\cdot\frac{x+P}{P}=d^3\left(\frac{y}{p}\right)^2$．由$\left(\frac{x-P}{P},\ \frac{x+P}{P}\right)=1$ 知$\frac{x-P}{P}=u$，$\frac{x+P}{P}=v$．

而$P\nmid(u,v)$，即有$x+p==Pv$，$x-P=Pu$ 其一必不为幂数。

若$d=1$，则$x^2-P^2=y^2$．故 $(x-y)(x+y)=P^2$． 对$x-y=P$, $x+y=P$, 得$x=P$, $y=0$，对$x-y=1$， $x+y=P^2$，得$2x=P^2+1$，故$2x\equiv P^2 \pmod 8$)，但前面已证得$x\equiv 0$ $\pmod 2$)．故知$d>1$、$2|x$、$P\nmid x$．

利用此定理，可给出$2P$ 能表为两幂数之差的一个充分条件．

定理 5 若P为奇素数，$2P-1$ 无平方因子．设$x^2-(2P+1)y^2=1$ 的基本解为$x_0+y_0\sqrt{2P-1}$ 满足条件 $(2P+1, y_0)=1$， 则$2P$可表为两幂数之差．

证 考虑方程$x^2-(2P-1)y^2=P^2$．此方程有特解 $P+1+\sqrt{2P+1}$ ，故 $x_n-y_n\sqrt{2P-1}=(P+1-\sqrt{2P+1})(x_0+y_0\sqrt{2P+1})^n$ 为它的解．从而$x_n\equiv 0 \pmod 2$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} y_0^{2i+1} x_0^{n-2i-1} \equiv 0 \pmod 2,\quad x_n \not\equiv 0 \pmod P \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2i} y_0^{2i}$$

$$x_0^{n-2i} + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} y_0^{2i+1} x_0^{n-2i-1} = (x_0+y_0)^n \not\equiv 0 \pmod P,\quad y_n \equiv 0 \pmod{2P+1}$$

$\Longleftrightarrow (P+1)ny_0x_0^{n-1}+x_0^n=x_0^{n-1}(x_0-Pny_0)\equiv 0 \pmod{2P+1}$． 但因$x_0^2-(2P+1)y_0^2=1$，故$x_0+y_0\not\equiv 0 \pmod P$)．又$x_0\not\equiv 0 \pmod{2P+1}$， 故对给定的$x_0$，$y_0$，同余式 $x_0-Pny_0\equiv 0 \pmod{2P+1}$ 对 n 有解$\Longleftrightarrow (2P+1, y_0)\,|\,x_0 \Longleftrightarrow (2P+1, y_0)=1$．

若$x_0\equiv 0 \pmod 2$，则取$n\equiv 0 \pmod 2$，有$x_n\equiv 0 \pmod 2$． 若$x_0\equiv 1 \pmod 2$， 则y $y_0\equiv 0 \pmod 2$， 故取任意n 均有$x_n\equiv 0 \pmod 2$．

综上所述.即$x^2-(2P+1)y^2=P^2$有$2|x$， $P\nmid x$， $(2P+1)|y$之解．故由定理4知，$2P$ 能表为两幂数之差．

定理 6: S.W.Golomb 猜想不成立．有：

$$6=5^4\cdot 7^3-463^2 .$$

本文是在指导教师柯召教授、孙琦付教授的指导下完成的．在此深表谢意．

参 考 文 献

〔1〕S.W.Golomb，Powerful Number，Amer.Math. Monthly，77 (1970)，848 —852．

〔2〕W.A.Sentance，Occurrences of consecutive odd powerful numbers，Amer.Math.Monthly，88 (1981)，272 —274．

〔3〕Andrzej Makowski，On a problem of Golomb on powerful numbers，Amer.Math.Monthly，79 (1972)，761．

〔4〕华罗庚，《数论导引》．

〔5〕柯召、孙琦，《谈谈不定方程》．