关于超平行体的几个不等式*

冷岗松
(湖南平江七中)

设$x_1, x_2, \cdots, x_m$是n维内积空间R^n中m个线性无关的向量，以这m个向量为棱所构成的超平行多面体的体积记为$V[x_1, x_2, \cdots, x_m]$，则经典的Hadamard不等式可表达为：

$$V[x_1, x_2, \cdots, x_m] \le \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|$$

其中$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Szasz推广了Hadamard不等式，得到了下面更精密的结果[1]：

1 $V[x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_m] \le V[x_1, x_2, \cdots, x_l] \cdot V[x_{l+1}, \cdots, x_m]$

2 $V[x_1, x_2, \cdots, x_m] \le \prod_{k=1}^{m} \{V[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_m]\}^{\frac{1}{m-1}}$

我们改进了Szasz不等式，得到了下面的

定理 1 记$S_l = L(x_1, x_2, \cdots, x_l)$，$S^{(j)} = L(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_m)$，向量$x$与子空间S所成的角为$\langle x, S\rangle$，则

(1.1) $V[x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_m] \le V[x_1, \cdots, x_m] \cdot \sin\langle x_i, S_l\rangle$，其中$i \in \{l+1, \cdots, m\}$；

(1.2) $V[x_1, x_2, \cdots, x_m] \le \prod_{k=1}^{m} \{V[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_m]\}^{\frac{1}{m-1}} \cdot \sin^{\frac{1}{m-1}}\langle x_j, S^{(j)}\rangle$. 其中$j \in \{1, 2, \cdots m\}$.

若把$x_1, x_2, \cdots, x_m$中的向量x_j关于$S^{(j)}$的正交分量y_j叫做超平行体的高，则由F·Riesz的线性泛函的表示定理不难证明：任给R^n中m个线性无关的向量$y_1, y_2, \cdots y_m$，可确定一个以此为高的超平行体. 记其体积为$V(y_1, y_2, \cdots y_m)$，我们有

定理 2 记$T_l = L(y_1, y_2, \cdots, y_l)$，$T^{(j)} = L(y_1, \cdots y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots y_m)$，则

(2.1) $V(y_1, y_2, \cdots, y_l, y_{l+1}, \cdots, y_m) \ge V(y_1, y_2, \cdots, y_l) \cdot V(y_{l+1}, \cdots, y_m) \csc\langle y_i, T_l\rangle$ 其中$i \in \{l+1, \cdots, m\}$；

(2.2) $V(y_1, y_2, \cdots, y_m) \ge \prod_{k=1}^{m} \{V(y_1, \cdots, y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_m)\}^{\frac{1}{m-1}} \csc\langle y_i, T^{(j)}\rangle$其中$j \in \{1, 2 \cdots, m\}$；

(2.3) $V(y_1, y_2, \cdots, y_m) \ge \prod_{k=1}^{m} \|y_k\| \cdot \prod_{k=2}^{m} \csc\langle y_k, y_m\rangle$；其中$m < k$.

为了证明定理 1 和定理 2，我们建立了下面两条引理：

引理 1 若$S_k = L(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ $(k = 1, 2, \cdots m)$， (转427页)

* 1986年 6 月25日收到.

对于$\partial_{y,\theta}^{\alpha''}b(x,y,z,t\theta,t\sigma)$ 有$Ct^{\mu_1+\mu_2+\delta|\alpha''|}$型的估计，从而只须讨论$\partial_y^{\alpha'}(e^{ih})$．因为对$h$的导数有

$$|\partial_y h(x,y,z,\sigma)|=|\varphi_1(y,z,\sigma)-\varphi_1(x,z,\sigma)|$$

$$\leqslant|y-x|\cdot\sup\left(\frac{|\varphi_{11}|}{|\sigma|}\right)\cdot|\sigma|\leqslant C_1|y-x|\cdot|\sigma|$$

因为在I_5的积分范围内有$|x-y||\sigma|^{1/2}\leqslant 1$，$|\theta|\geqslant\frac{C}{2}|\sigma|$，所以

$$|\partial_y h(x,y,z,\sigma)|\leqslant C_1|\sigma|^{1/2}\leqslant C|\theta|^{1/2}\ .$$

对于h的高于二阶的导数，也容易由$|\sigma|\leqslant\frac{2}{C_0}|\theta|$导出

$$|\partial_y^{\beta}h(x,y,z,\sigma)|\leqslant C|\theta|,\quad |\beta|\leqslant 2$$

因此可得$|\partial_y^{\alpha}e^{ih(x,y,z,\sigma)}|\leqslant C|\theta|^{\frac{|\alpha|}{2}}$，或

$$|\partial_y^{\alpha}e^{ih(x,y,z,t\sigma)}|\leqslant Ct^{\frac{|\alpha|}{2}}|\theta|^{\frac{|\alpha|}{2}}.$$

故条件（1.3）成立．从而对I_5可应用定理2．注意到仍有$Q=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}$，故$I_5\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j t^{-j}$，

其中

$$a_j=(2\pi)^n\frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\partial_{y,\theta},\partial_{y,\theta}\rangle\right)^j(e^{ih(x,y,z,t\sigma)}b(x,y,z,t\theta,t\sigma))\Big|_{\substack{y=x\\ \theta=\phi_1(x,z,\sigma)}}$$

由于函数$\psi\left(\frac{2(\theta-\varphi_1(x,z,\sigma))}{c_0|\sigma|}\right)$，$\psi(|x-y|\cdot|\sigma|^{1/2})$ 在临界点附近为1，故有

$$I_5(x,z,t\sigma)\sim(2\pi)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{-j}}{j!}\left(\sum_k D_{y_k}\partial_{\theta_k}\right)^j(e^{ih(x,y,z,t\sigma)}a_1(x,y,t\theta)a_2(y,z,t\sigma))\Big|_{\substack{y=x\\ \theta=\varphi_1(x,z,\sigma)}}$$

又通过对导数的估计，知在S_{ρ}^{m}类象征渐近展开意义下成立

$$I_5(x,z,\sigma)\sim(2\pi)^n\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}D_y^{\alpha}[(\partial_\theta^{\alpha}a_1(x,y,\theta))a_2(y,z,\sigma)\cdot e^{ih(x,y,z,\sigma)}]\Big|_{\substack{y=x\\ \theta=\phi_1(x,z,\sigma)}}\qquad(2.18)$$

综合前面对I_2,I_3,I_4的分析，即得（2.11）．

利用类似的方法还可以导出其他一些类型的Fourier积分算子的复合公式，定理2也可以用于给出Fourier分布表示形式转换的一个直接的证明，这些，我们在此不一一详述了

参 考 文 献

〔1〕Hörmander, L., Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127(1971), 79—183.

〔2〕Duistermaat, J. J., Fourier Integral Operators, Lecture Notes, Courant Institute of Math. Sciences, 1973.

〔3〕Poston, T. & Stewart, I., Catastrophe Theory and Its Applications, London, Pitman, 1978.

〔4〕Kumano-go, H., Pseudo-differential operators, The MIT Press, 1982.

（接428页） $V[x_1,x_2,\cdots,x_m]=\prod_{k=1}^{m}\|x_k\|\prod_{k=2}^{m}\sin\langle x_k,S_{k-1}\rangle$.

引理2 若$T_k=L(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ $(k=1,2,\cdots,m)$，

则
$$V(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\prod_{k=1}^{m}\|y_k\|\prod_{k=2}^{m}\csc\langle y_k,T_{k-1}\rangle\ .$$

参 考 文 献

〔1〕E.F.Beckenbach and R.Bellman, Inequalities, Springer—Verlag, 1961. p61—65.