1987年 8月

数学研究与评论
第七卷　第三期

具无界值上半连续集值映射的拓扑度*

范　先　令

（兰州大学数力系）

§1　记号．单值逼近定理

设X和Y是Banach空间．用C（X）表示X中一切非空闭凸子集所成之族．对于X中的点x与非空子集A和B，记$d(x,B)=\inf\{\|x-y\|: y\in B\}$，$d^*(A,B)=\sup\{d(x,B): x\in A\}$．$\mathcal{N}(A,\varepsilon)=\{x\in X: d(x,A)<\varepsilon\}$，其中$\varepsilon>0$．

X×Y中的范数定义为$\|(x,y)\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}$．

设F：$D\subset X\longrightarrow C(Y)$　为一集值映射．F的图象记作$G_F=\{(x,y)\in X\times Y: x\in D, y\in F(x)\}$．

若单值映射F_ε：$D\rightarrow Y$连续，$F_\varepsilon(D)\subset\overline{co}F(D)$，且$d^*(G_{F_\varepsilon},G_F)<\varepsilon$，则称$F_\varepsilon$为$F$的$\varepsilon$-单值逼近．

定理1.1　（单值逼近定理）设F：$D\subset X\rightarrow C(Y)$上半连续，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在$F$的$\varepsilon$-单值逼近．（见〔1〕中命题1.10）．

在文中，Ω总表示X中的有界开集．n为正整数．I为X上的恒同算子．

§2　Φ_∞-紧向量场的拓扑度

设Φ为X中的集-或球-非紧致度．B_n表示X中的中心在原点半径为n的闭球．2^X表示X中一切子集所成之族．

定义非紧致度Φ_∞: $2^X\longrightarrow[0,\infty]$为

$$\Phi_\infty(A)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A\cap B_n),\quad\forall A\in 2^X.$$

显然，当A为X中有界集时，$\Phi_\infty(A)=\Phi(A)$．当A无界时，$\Phi_\infty(A)$不一定等于$+\infty$．例如，当A是X中有限维子空间时，$\Phi_\infty(A)=0$．

若A是X中的闭集且$\Phi_\infty(A)=0$，则称A为Φ_∞-紧的．若$\overline{A}$是Φ_∞-紧的，则称A为Φ_∞-相对紧的．

由Φ_∞的定义及Φ的性质，可得

命题2.1　设A⊂X，D⊂X，λ是实数．则

i.）$A\subset D\Rightarrow\Phi_\infty(A)\le\Phi_\infty(D)$；

ii）$\Phi_\infty(\overline{A})=\Phi_\infty(A)$；

iii）$\Phi_\infty(A)=0\Longleftrightarrow$A是$\Phi_\infty$-相对紧的；

iv）$\Phi_\infty(A\cup D)=\max\{\Phi_\infty(A),\Phi_\infty(D)\}$．

* 1984年3月29日收到．中国科学院科学基金资助的课题．

v）$\Phi_{\infty}(\lambda A)=|\lambda|\Phi_{\infty}(A)$.

注记2.2 关系式“$\Phi_{\infty}(\mathrm{co}A)=\Phi_{\infty}(A)$”与“$\Phi_{\infty}(A+D)\le\Phi_{\infty}(A)+\Phi_{\infty}(D)$”一般般不成立.

例1 设$X=l^2$，$\{e_n\}$为其标准正交基. 令$A=\{\pm ne_n:n=1,2,\cdots\}$. 那么显然$\Phi_{\infty}(A)=0$. 而由$\mathrm{co}A\supset\{e_n:n=1,2,\cdots\}$可知$\Phi_{\infty}(\mathrm{co}A)>0$.

例2 设X及$\{e_n\}$如例1所述. 令$A=\{\lambda ne_n:\ \lambda\ge1,n=1,2,\cdots\}$，$D=-A$. 那么，$\Phi_{\infty}(A)=\Phi_{\infty}(D)=0$. 但$A+D\supset\{e_n:n=1,2,\cdots\}$，从而$\Phi_{\infty}(A+D)>0$.

定义2.3 映射$F:\overline{\Omega}\subset X\to C(X)$称为$\Phi_{\infty}$-紧的，若$F$上半连续且$\Phi_{\infty}(\overline{\mathrm{co}}F(\overline{\Omega}))=0$. 此时称$I-F$为$\overline{\Omega}$上的$\Phi_{\infty}$-紧向量场.

显然，Φ_{∞}-紧映射是紧映射的推广. 有限维空间中的具非空闭凸值的上半连续集值映射是Φ_{∞}-紧的.

命题2.4 设$F:\overline{\Omega}\to C(X)$是$\Phi_{\infty}$-紧映射，则$T=I-F$映$\overline{\Omega}$中的闭集为闭集.

证明 设$D\subset\overline{\Omega}$闭. $y_n\in T(D)$，$y_n\to y_0$. 于是有$x_n\in D$，$f_n\in F(x_n)$使$x_n-f_n=y_n\to y_0$. 由$\{x_n\}$有界，知$\{f_n\}$有界. 因$\Phi_{\infty}(\overline{\mathrm{co}}F(\overline{\Omega}))=0$. 故$\Phi_{\infty}(\{f_n\})=0$. 于是$\{f_n\}$中有子列$f_{n_k}\to f_0$，从而$x_{n_k}\to x_0$，$x_0-f_0=y_0$. 由$F$上半连续得$f_0\in F(x_0)$，即$y_0\in T(x_0)$. □

集值Φ_{∞}-紧映射的ε-单值逼近F_{ε}也是Φ_{∞}-紧映射，这是由于$F_{\varepsilon}(\overline{\Omega})\subset\overline{\mathrm{co}}F(\overline{\Omega})$.

下面先对单值Φ_{∞}-紧向量场定义拓扑度.

引理2.5 设$F:\overline{\Omega}\to X$是单值Φ_{∞}-紧映射，且$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$. 记$r=\sup\{\|x\|:x\in\overline{\Omega}\}$. 设$n>r$. 令$\Omega_n=\{x\in\Omega:\|F(x)\|<n\}$. 那么Leray Schauder度$\deg(I-F,\Omega_n,0)$有意义且与$n$的选取无关.

证明 由$F(\overline{\Omega}_n)\subset F(\overline{\Omega})\cap B_n$知$F:\overline{\Omega}_n\to X$是紧映射. 任取$x\in\partial\Omega_n$，若$x\in\partial\Omega$自然有$x\neq F(x)$. 若$x\notin\partial\Omega$，那么$x\in\Omega\cap\partial\Omega_n$. 这可推出$\|F(x)\|=n$. 故也有$x\neq F(x)$. 因此$0\notin(I-F)(\partial\Omega_n)$. 拓扑度$\deg(I-F,\Omega_n,0)$有意义，由切除性易证它与$n$的选取无关. 并注意当$\Omega_n=\phi$时，$\deg(I-F,\Omega,0)=0$. □

定义2.6 设$F:\overline{\Omega}\to X$是Φ_{∞}-紧映射，且$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$. n和Ω_n如引理2.5中所述. 现定义

$$\deg(I-F,\Omega,0)\equiv\deg(I-F,\Omega_n,0).$$

如此定义的拓扑度具有可解性，区域可加性及下述同伦不变性.

定理2.7 设$H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$连续，且$\Phi_{\infty}(\overline{\mathrm{co}}H(\overline{\Omega}\times[0,1]))=0$. 若$0\notin(I-H)(\partial\Omega\times[0,1])$，则$\deg(I-H_t,\Omega,0)$与$t\in[0,1]$无关.

证明 对每个$t\in[0,1]$，$H_t:\overline{\Omega}\to X$显然$\Phi_{\infty}$-紧.

取某$z_0\in H(\overline{\Omega}\times[0,1])$. 取$n>\max\{r,\|z_0\|\}$，其中$r=\sup\{\|x\|:x\in\overline{\Omega}\}$. 作$P:X\to B_n$如下：当$x\in B_n$时，令$Px=x$. 当$x\notin B_n$时，令$Px$为线段$[z_0,x]$与$\partial B_n$的交点. 那么映射$PH:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$连续且$PH(\overline{\Omega}\times[0,1])\subset B_n\cap\overline{\mathrm{co}}H(\overline{\Omega}\times[0,1])$. 因此$PH$是紧映射. 易见$0\notin(I-PH)(\partial\Omega\times[0,1])$. 因此$\deg(I-PH_t,\Omega,0)$与$t\in[0,1]$无关. 对每个$t\in[0,1]$，记$\Omega_{n,t}=\{x\in\Omega:H_t(x)<n\}$. 由定义2.6及切除性，易见$\deg(I-PH_t,\Omega,0)=\deg(I-H_t,\Omega_{n,t},0)=\deg(I-H_t,\Omega,0)$. 因而$\deg(I-H_t,\Omega,0)$与

$t\in[0,1]$无关． □

下面定义集值Φ_∞—紧向量场的拓扑度．

引理2.8 设$F:\overline{\Omega}\to C(X)$为集值$\Phi_\infty$—紧映射，且$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$．设$F_\varepsilon:\overline{\Omega}\to X$是$F$的$\varepsilon$-单值逼近．那么，当$\varepsilon>0$充分小时，$0\notin(I-F_\varepsilon)(\partial\Omega)$．

证明 若否，则存在正数序列$\varepsilon_n\to 0$，$x_n\in\partial\Omega$，使得$x_n-F_{\varepsilon_n}(x_n)=0$．于是有$y_n\in\overline{\Omega}$，$f_n\in F(y_n)$使得$\|y_n-x_n\|<\varepsilon_n$，$\|f_n-F_{\varepsilon_n}(x_n)\|<\varepsilon_n$．从而$y_n-f_n\to 0$．由$\{y_n\}$有界知$\{f_n\}$有界．于是$\Phi(\{f_n\})=0$．不妨设$f_n\to f_0$．于是$y_n\to x_0=f_0$，$x_n\to x_0\in\partial\Omega$．由$F$上半连续得$x_0\in F(x_0)$．这与$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$矛盾．

定义2.9 设$F:\overline{\Omega}\to C(X)$ Φ_∞—紧且$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$．设$\varepsilon_n\searrow 0$，$F_{\varepsilon_n}:\overline{\Omega}\to X$是$F$的的$\varepsilon_n$-单值逼近．兹定义$\deg(I-F,\Omega,0)=\lim\limits_{n\to\infty}\deg(I-F_{\varepsilon_n},\Omega,0)$．

命题2.10 上述定义有意义且与F的单值逼近序列$\{F_{\varepsilon_n}\}$的选取无关．

证明 由引理2.8知对于足够大的n，$\deg(I-F_{\varepsilon_n},\Omega,0)$有意义．为证本命题，只需证对于$F$的任意两个单值逼近序列$\{F_{\varepsilon_n}\}$和$\{F_{\varepsilon_m}\}$，当$n$和$m$充分大时有$\deg(I-F_{\varepsilon_n},\Omega,0)=\deg(I-F_{\varepsilon_m},\Omega,0)$．

令$H_{n,m}(x,t)=(1-t)F_{\varepsilon_n}(x)+tF_{\varepsilon_m}(x)$．那么$H_{n,m}:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$连续，且$H_{n,m}(\overline{\Omega}\times[0,1])\subset\overline{co}\,F(\overline{\Omega})$．因此$\Phi(\overline{co}\,H_{n,m}(\overline{\Omega}\times[0,1]))=0$．由定理2.7，只需验证当$n$和$m$充分大时有$0\notin(I-H_{n,m})(\partial\Omega\times[0,1])$．假若不然，则有序列$\{x_k\}\subset\partial\Omega$，$\{t_k\}\subset[0,1]$，$n_k\to\infty$，$m_k\to\infty$，使得$x_k-H_{n_k,m_k}(x_k,t_k)=0$．由$\{x_k\}$有界知$\{H_{n_k,m_k}(x_k,t_k)\}$有界．这推出它们有收敛子列．不妨设$x_k\to x_0\in\partial\Omega$，$H_{n_k,m_k}(x_k,t_k)\to x_0$．于是存在$\{y_k\}\subset\overline{\Omega}$，$\{z_k\}\subset\overline{\Omega}$，$f_k\in F(y_k)$，$g_k\in F(z_k)$使得$\|y_k-x_k\|<\varepsilon_{n_k}$，$\|f_k-F_{\varepsilon_{n_k}}(x_k)\|<\varepsilon_{n_k}$，$\|z_k-x_k\|<\varepsilon_{m_k}$，$\|g_k-F_{\varepsilon_{m_k}}(x_k)\|<\varepsilon_{m_k}$．于是有$y_k\to x_0$，$z_k\to x_0$，$(1-t_k)f_k+t_kg_k\to x_0$．

记$\varepsilon_0=d(x_0,F(x_0))$．那么$\varepsilon_0>0$．由$F$上半连续知，存在$\delta_0>0$，使当$\|x'-x_0\|<\delta_0$（$x'\in\overline{\Omega}$）时有$d^*(F(x'),F(x_0))<\frac{\varepsilon_0}{2}$．取$k$充分大，使$\|y_k-x_0\|<\delta_0$，$\|z_k-x_0\|<\delta_0$．这时$f_k,g_k\in\mathcal{N}(F(x_0),\frac{\varepsilon_0}{2})$，从而$(1-t_k)f_k+t_kg_k\in\mathcal{N}(F(x_0),\frac{\varepsilon_0}{2})$．这推出$\|x_0-(1-t_k)f_k-t_kg_k\|\geq\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}$．这与$(1-t_k)f_k+t_kg_k\to x_0$矛盾． □

易证定义2.9中所定义的拓扑度具有可解性，区域可加性及下述同伦不变性．

定理2.11 设$H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to C(X)$上半连续，且$\Phi_\infty(\overline{co}\,H(\overline{\Omega}\times[0,1]))=0$．若$0\notin(I-H)(\partial\Omega\times[0,1])$，则$\deg(I-H_t,\Omega,0)$与$t\in[0,1]$无关．

注记2.12 〔2〕中定义了具无界闭凸值的上半连续$\varkappa$-紧向量场的拓扑度．这要求映射$F:\overline{\Omega}\to C(X)$有下述性质：存在某个$n$，使得对所有的$x\in\overline{\Omega}$均有$F(x)\cap B_n\neq\phi$．而我们所讨论的$\Phi_\infty$紧映射则不一定具有此性质．例如取$X=R^1$，$\Omega=(0,\frac{\pi}{2})$，定义$F:[0,\frac{\pi}{2}]\to C(X)$为：当$x\in[0,\frac{\pi}{2})$时，令$F(x)=\mathrm{tg}\,x$．当$x=\frac{\pi}{2}$时，令$F(x)=(-\infty,-\infty)$．那么$F$上半连续，因而是$\Phi_\infty$-紧的．但对于任何的$n$，均存在$x\in[0,\frac{\pi}{2})$使得$F(x)\cap B_n=\phi$．

当X是有限维空间时，〔2〕中的拓扑度适用于具无界闭凸值的连续（既上半连续又下半连续）集值映射，我们的度理论适用于具无界闭凸值的上半连续集值映射．

§3 Φ_{∞}-终归紧向量场的拓扑度

设D是X中的闭集，$F:D\to C(X)$上半连续．按照〔3〕中定义终归紧映射的程序，可得到F的终归核$K=K(F,D)$使得或者$K=\phi$，或者$K\neq\phi$时有$\overline{co}F(K\cap D)=K$．

定义3.1 若$K=\phi$，或当$K\neq\phi$时有$\Phi_{\infty}(K)=0$，则称F为Φ_{∞}-终归紧映射．

当$K\neq\phi$时，由集值映射时的Dugundji 延拓定理（见〔4〕），存在$F|_{K\cap D}$的上半连续延拓$\widetilde{F}:D\to C(X)$，使得$\widetilde{F}(D)\subset K$．因此当$F$为$\Phi_{\infty}$-终归紧时，$\widetilde{F}:D\to C(X)$是$\Phi_{\infty}$-紧的．

定义3.2 设$F:\overline{\Omega}\to C(X)$是$\Phi_{\infty}$-终归紧映射且$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$．设$K=K(F,\overline{\Omega})$．若$K=\phi$，定义$\deg(I-F,\Omega,,0)=0$．若$K\neq\phi$，取$F|_{K\cap\overline{\Omega}}$的$\Phi_{\infty}$-紧延拓$\widetilde{F}:\overline{\Omega}\to C(X)$．$(\widetilde{F}(\overline{\Omega})\subset K)$．定义$\deg(I-F,\Omega,0)=\deg(I-\widetilde{F},\Omega,0)$．

仿照〔3〕，可证上述定义有意义且与$\widetilde{F}$的选取无关．还可证所定义的拓扑度具有可解性，区域可加性及下述同伦不变性．

定理3.3 设$H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to C(X)$上半连续．记$K'=K(H,\overline{\Omega}\times[0,1])$（见〔3〕）．若$\Phi_{\infty}(K')=0$且$0\notin(I-H)(\partial\Omega\times[0,1])$，则$\deg(I-H_t,\Omega,0)$与$t\in[0,1]$无关．

定义3.4 设$F:D\subset X\to C(X)$上半连续．

i）若存在正常数k，使得对D中任何子集A有$\Phi_{\infty}(\overline{co}F(A))\leq k\Phi_{\infty}(A)$，则称$F$为$k$-$\Phi_{\infty}$压缩的．

ii）若对于D中任何子集A，当$\Phi_{\infty}(A)\neq0$时有$\Phi_{\infty}(\overline{co}F(A))<\Phi_{\infty}(A)$，而当$\Phi_{\infty}(A)=0$时有$\Phi_{\infty}(\overline{co}F(A))=0$，则称$F$为$\Phi_{\infty}$-凝聚的．

定理3.5 k-Φ_{∞}压缩（$k<1$）与Φ_{∞}-凝聚映射的是Φ_{∞}-终归紧的．

证明 只需证$F:D\to C(X)$为Φ_{∞}-凝聚的情形．

设$K=K(F,D)$．若$K=\phi$，则结论已成立．下设$K\neq\phi$．只需证$\Phi_{\infty}(K\cap D)=0$．若不然，则有$\Phi_{\infty}(K)=\Phi_{\infty}(\overline{co}F(K\cap D))<\Phi_{\infty}(K\cap D)$．这与$K\supset K\cap D$矛盾． □

仿照〔3〕的推理，不难得到其他一些进一步的结果．本文从略了．

参 考 文 献

〔1〕Борисович, Ю. Г. И. Т. Д., Топологические Методы В Теории Неподвижных Точек Многозначиных Отображений, Успехи Мат. Наук, 35：1（1980），59—126．

〔2〕De Blasi, F.S., A remark on the definition of topological degree for set valued mappings, J. Math. Anal. Appl., 92(1983), 445—451．

〔3〕Petryshyn, W. V. and Fitzpatrick, P.M., A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 194(1974), 1—25.

〔4〕余庆余，算子方程$x-T(x)=\lambda F(x)$的非零解，兰州大学学报，20（1984，数学专号），63—70．