概率线性赋范空间与随机算子*

张　石　生

（四川大学数学系，成都）

本文进一步研究概率线性赋范空间中随机算子的理论，本文的结果改进和发展了最近林熙〔1〕，以及〔4〕中的某些主要结果。

一、定义、符号及某些辅助性结果

本文以下处处假定（$\Omega,\mathscr{A},P$）是一完全的概率空间，（$X,\|\cdot\|$）是一可分的实Banach空间，$R=(-\infty,\infty)$，$R^+=[0,\infty)$，Z^+表一切非负整数的集合；又E表映Ω到X的一切X-值随机变量的集合（E中几乎处处相等视为相等），对每一$x\in X$，可以视其为E中之一常值随机变量，故X可以嵌入到E中。

映象$F:R\to R^+$称为分布函数，如果它是不减、左连续、$\inf\limits_{t\in R}F(t)=0$，$\sup\limits_{t\in R}F(t)=1$，以后我们记$H$为：

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

定义1　我们称（E，$\mathscr{F}$）为（$X,\|\cdot\|$）上的E-空间，如果E是一切映$\Omega\to X$的X-值随机变量的等价类的全体，又$\mathscr{F}$是$E\to\mathscr{D}$（一切分布函数的集合）的，并由下式定义的映象（我们记$\mathscr{F}(x)=F_x$，$x\in E$，又$F_x(t)$表F_x在$t\in R$的值）：

$$F_x(t)=P\{\omega\in\Omega:\|x(\omega)\|<t\},\quad\forall x\in E,\ t\in R.$$

设（E，$\mathscr{F}$）是（$X,\|\cdot\|$）上的E-空间，Δ_m是由下式定义的三角范数：$\Delta_m(a,b)=\max\{a+b-1,0\}$，，$\forall a,b\in[0,1]$，则如〔1〕的定理2所证明的，（E，$\mathscr{F}$，$\Delta_m$）就是一Menger概率线性赋范空间（简称Menger PN-空间）（有关此类空间的定义和性质，见〔3〕或〔1〕）因而由〔3〕的定理7.2知，（E，$\mathscr{F}$，Δ_m）是由邻域系$\{U_p(\varepsilon,\lambda):p\in E,\ \lambda>0,\ \varepsilon>0\}$，这里

$$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E:F_{x-p}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

所导出的拓朴$\mathscr{T}$的Hausdorff拓朴空间，按照这一拓朴可以在（E，$\mathscr{F}$，Δ_m）中引入如下的概念．

定义2　设（E，$\mathscr{F}$，Δ_m）是（$X,\|\cdot\|$）上的E-空间，$\mathscr{T}$是由邻域系$\{U_p(\varepsilon,\lambda):p\in E,\ \lambda>0,\ \varepsilon>0\}$导出的拓朴，E中的序列$\{x_n\}$称为$\mathscr{T}$-收敛于$x_*\in E$（记为$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$），如果对任给的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时有$F_{x_n-x_*}(\varepsilon)>1-\lambda$．$\{x_n\}\subset E$称为$\mathscr{T}$-Cauchy列，如果对任给的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n,m\geqslant N$时，$F_{x_n-x_m}(\varepsilon)>1-\lambda$．

*1983年5月6日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$(E,\mathscr{F},\Delta_m)$ 称为$\mathscr{T}$完备的E-空间，如果E中的每一$\mathscr{T}$-Cauchy列，都是E中的$\mathscr{T}$收敛列

命题1 设$(E,\mathscr{F},\Delta_m)$是$(X,\|\cdot\|)$上的E-空间，则：

(i) 下面的结论等价：

(a) $\{x_n\}\subset E$ $\mathscr{T}$-收敛于$x_*\in E$(记为$x_n\to x_*$)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n-x}(t)=H(t),\forall t\geqslant 0$；

(c) $\{x_n\}\subset E$依概率收敛于$x_*\in E$(记为$x_n\xrightarrow{P}x_*$).

(ii) $(E,\mathscr{F},\Delta_m)$是$\mathscr{T}$完备的.

证 (i) (a)、(b)的等价性由〔3,引理8.1〕得之. 现证(a),(c)的等价性.

设$x_n\to x_*$，故对任给的$\varepsilon>0,\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$

$$F_{x_n-x_*}(\varepsilon)=P(\omega\in\Omega:\|x_n(\omega)-x_*(\omega)\|<\varepsilon)>1-\lambda.$$

由λ的任意性，上式表明$x_n\xrightarrow{P}x$.

反之，设$x_n\xrightarrow{P}x_*$，于是对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(\omega\in\Omega:\|x_n(\omega)-x_*(\omega)\|<\varepsilon)=1.$$

因此对任给的$\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时，由上式有

$$P(\omega\in\Omega:\|x_n(\omega)-x_*(\omega)\|<\varepsilon)>1-\lambda,$$

即$F_{x_n,x_*}(\varepsilon)>1-\lambda$. 故$x_n\to x_*\in E$. 结论(i)得证.

(ii). 由结论(i)我们只要证明$(E,\mathscr{F},\Delta_m)$按概率意义下是完备的即可. 事实上，因E中每一P-Cauchy 列都是P-收敛列，且其极限仍属于E. 证毕.

定义3 设$(E,\mathscr{F},\Delta m)$是$(X,\|\cdot\|)$上的E-空间，我们称E的自映象为随机算子.

设T：E→E是随机算子，我们称$x_*(\omega)\in E$是T的随机不动点，如果$P\{\omega\in\Omega:Tx_*(\omega)=x_*(\omega)\}=1$. 随机算子$T$：E→E称为$P$-连续的，如果$T$把E中依概率收敛的序列变成概率收敛的序列.

二、主 要 结 果

在本节，我们处处假定$\Phi(t)$是满足次之条件(Φ)的函数：

(Φ) Φ:$[0,\infty)\to[0,\infty)$对t严格增，$\Phi(0)=0$，且对每一$t>0$，$\Phi^n(t)\to\infty$.($\Phi^n(t)$表$\Phi(t)$的n次迭代).

设S，T：E→E是可交换的随机算子，以下记

$$O_{S,T}(x(\omega);0,\infty)=\{(S^iT^jx)(\omega)\}_{i,j=0}^{\infty},\quad x(\omega)\in E.$$

定理1 设$(E,\mathscr{F},\Delta_m)$是$(X,\|\cdot\|)$上的E-空间，设S，T是E→E的P-连续的可交换的随机算子. 设存在某一$x_0(\omega)\in E$及一分布函数$G(t),G(0)=0$，使得

$$(2.1)\quad F_{x-y}(t)\geqslant G(t),\ \forall x,y\in O_{S,T}(x_0(\omega),0,\infty),\quad \forall t\geqslant 0.$$

再设存在$m,m'\in Z^+,m+m'\geqslant 1$，使得对一切$x(\omega)\in E$有

$$(2.2)\quad \inf_{p,q\in O_{S,T}((S^mT^{m'}x)(\omega),0,\infty)}F_{p-q}(t)\geq\inf_{p,q\in O_{S,T}(x(\omega);0,\infty)}F_{p-q}(\Phi(t)),\forall t\geqslant 0.$$

则$\{(S^nT^nx_0)(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$依概率收敛于$S,T$之一公共的随机不动点.

证 令$h=\max\{m,m'\}$. 对给定的$x_0(\omega)\in E$，由(2,2)得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\inf_{p,q\in O_{S,T}((S^hT^hx_0)(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(t) \geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}((S^mT^{m'}x_0)(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(t)$$

$$\geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}(x_0(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

由归纳法一般可证，对一切 $n, n=1,2,\cdots$ 有

$$\inf_{p,q\in O_{S,T}((S^{nh}T^{nh}x_0)(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(t) \geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}(x_0(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(\Phi^n(t))$$

$$(\text{由条件}(2.1))\geqslant G(\Phi^n(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

于上式两端让 $n\to\infty$ 取极限，并注意条件（Φ），得

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{p,q\in O_{S,T}((S^{nh}T^{nh}x_0)(\omega);0,\infty)} \geqslant \lim_{n\to\infty} G(\Phi^n(t) = H(t).$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在 $N=N(\varepsilon,\lambda)$，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\inf_{p,q\in O_{S,T}((S^{nh}T^{nh}x_0)(\omega);0,\infty)} > 1-\lambda.$$

上式表明 $\{(S^iT^jx_0)(\omega)\}_{i,j=0}^{\infty}$ 中迭代指标 i, j 都趋向于∞的每一子列都是E中的$\mathscr{T}$-Cauchy 列．由E-空间（E, $\mathscr{F}$, Δ_m）的$\mathscr{T}$完备性，现证它们都$\mathscr{T}$-收敛于同一元 $x_*(\omega)$）$\in$E.

事实上，设 $(S^iT^jx_0)(\omega)\to x_*(\omega)\in$E$(i,j\to\infty)$，$(S^lT^kx_0)(\omega)\to y_*(\omega)\in$E $(l,k\to\infty)$. 于是对一切 $t>0$，由Menger 三角不等式得

$$F_{x_*-y_*}(t)\geqslant \Delta_m\Big(F_{x_*-S^iT^jx_0}\big(\frac{t}{3}\big),\ \Delta_m\Big(F_{S^iT^jx_0-S^lT^kx_0}\big(\frac{t}{3}\big),\ F_{S^lT^kx_0-y_*}\big(\frac{t}{3}\big)\Big)\Big).$$

于上式右端让 $i, j, l, k\to\infty$，即得 $F_{x_*-y_*}(t)=1$，$\forall t>0$．故

$$x_*(\omega)=y_*(\omega).$$

特别，下列三序列都$\mathscr{T}$-收敛于 $x_*(\omega)$：

$$x_0(\omega),(STx_0)(\omega),\cdots\cdots,\ (S^nT^nx_0)(\omega),\cdots\cdots;$$

$$(Sx_0)(\omega),\ S(STx_0)(\omega),\cdots\cdots,S(S^nT^nx_0)(\omega),\cdots\cdots;$$

$$(Tx_0)(\omega),\ T(STx_0)(\omega),\cdots\cdots,T(S^nT^nx_0)(\omega)\cdots\cdots,$$

于是由 S, T 的P-连续性，从而也是$\mathscr{T}$-连续的，得知

$$x_*^{(\omega)}=(Sx_*)(\omega)=(Tx_*)(\omega)\quad a.s.$$

即 $x_*(\omega)$ 是 S, T 的公共的随机不动点．　　证毕．

定理 2．设（E, $\mathscr{F}$, Δ_m）是（X, $\|\cdot\|$）上的E-空间，S, T 是E$\to$E的P-连续的可交换的随机算子．设存在 $x_0(\omega)\in$E和一分布函数 $G(t), G(0)=0$ 满足条件（2.1）．再设存在 $m, m', n, n'\in Z^+$，$m+m'\geqslant 1$，$n+n'\geqslant 1$，使得对任意的 $x, y\in$E

$$(2.3)\quad \inf_{p,q\in\{O_{S,T}((S^mT^{m'}x)(\omega);0,\infty)\cup O_{S,T}((S^nT^{n'}y)(\omega);0,\infty)\}} F_{p-q}(t)$$

$$\inf_{p,q\in\{O_{S,T}(x;0,\infty)\cup O_{S,T}(y;0,\infty)\}} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

而且序列 $\{(S^nT^n(x_0)(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ 依概率收敛于 $x_*(\omega)$.

证　令 $h=\max\{m, m', n, n'\}$，并于（2.3）中取 $y=x$，有

$$\inf_{p,q\in O_{S,T}((S^hT^hx)(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(t)\geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}(x;0,\infty)} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall x\in\text{E},\ t\geqslant 0.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

于是由定理1 知 $\{(S^n T^n x_0)(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ 依概率收敛于 S, T 之一公共的随机不动点 $x_*(\omega)\in$E.

现证 $x_*(\omega)$ 是 S, T 在E中的唯一的公共随机不动点. 设不然, $y_*(\omega)\in$E 是 S, T 之另一公共的随机不动点, 故

$$F_{x_*-y_*}(t)=\inf_{p,q\in\{O_{S,T}((S^m T^{m'} x_*)(\omega);0,\infty)\cup O_{S,T}((S^n T^{n'} y_*)(\omega);0,\infty)\}} F_{p-q}(t)$$

$$\geqslant \inf_{p,q\in\{O_{S,T}(x_*(\omega);0,\infty)\cup O_{S,T}(y_*;0,\infty)\}} F_{p-q}(\Phi(t))=F_{x_*-y_*}(\Phi(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

由归纳法一般可证

$$F_{x_*-y_*}(t)\geqslant F_{x_*-y_*}(\Phi^n(t)),\quad n=1,2,\cdots,\quad \forall t\geqslant 0.$$

于上式右端让 $n\to\infty$ 取极限, 并注意条件 (Φ), 即得

$$F_{x_*-y_*}(t)=H(t),\quad \forall t\geqslant 0.$$

故 $x_*(\omega)=y_*(\omega), a.s.$ 证毕.

定理 3 设 (E, $\mathscr{F}$, Δ_m) 是 (X, $\|\cdot\|$) 上的E-空间, S, T 是E→E的P-连续的可交换的随机算子, 设存在 $x_0(\omega)\in$E 和一分布函数 $G(t)$, $G(0)=0$ 满足条件 (2.1). 再设存在 $m, m', n, n'\in Z^+$, $m+m'\geqslant 1$, $n+n'\geqslant 1$, 使得对任意的 $x, y\in$E

$$(2.4)\quad F_{S^m T^{m'} x-S^n T^{n'} y}(t)\geqslant \inf_{p,q\in\{O_{S,T}(x;0,\infty)\cup O_{S,T}(y;0,\infty)\}} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

则定理2 的结论仍成立.

证 令 $h=\max\{m, m', n, n'\}$, 对任一 $\xi(\omega)\in$E, 令

$$(2.5)\quad \begin{cases} x(\omega)=(S^{h-m+i}T^{h-m'+j}\xi)(\omega), & i, j\geqslant 0,\\ y(\omega)=(S^{h-n+k}T^{h-n'+l}\xi)(\omega), & k, l\geqslant 0.\end{cases}$$

把 (2.5) 代入 (2.4), 并注意 S, T 的可交换性得

$$F_{S^{h+i}T^{h+j}\xi-S^{h+k}T^{h+l}\xi}$$

$$\geqslant \inf_{p,q\in\{O_{S,T}((S^{h-m+i}T^{h-m'+j}\xi)(\omega);0,\infty)\cup O_{S,T}((S^{h-n+k}T^{h-n'+l}\xi)(\omega);0,\infty)\}} F_{p-q}(\Phi(t))$$

$$\geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}(\xi(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall t\geqslant 0,\ \forall \xi(\omega)\in \mathrm{E}.$$

于上式左端对 $i, j\geqslant 0$ 取下确界得

$$\inf_{i,j\geqslant 0}\{F_{S^{h+i}T^{h+j}\xi-S^{h+k}T^{h+l}\xi}(t)\}=\inf_{p,q\in O_{S,T}((S^h T^h\xi)(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(t)$$

$$\geqslant \inf_{p,q\in O_{S,T}(\xi(\omega);0,\infty)} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall \xi(\omega)\in \mathrm{E},\ t\geqslant 0,\ k, l\geqslant 0.$$

于是由定理1, 序列 $\{(S^n T^n x_0)(\omega)\}$ 依概率收敛于 S, T 之一公共的随机不动点 $x_*(\omega)$. 仿定理2 一样可证 $x_*(\omega)$ 是 S, T 在E中的唯一的公共随机不动点. 证毕.

由定理3 可得下面的推论.

推论 设 (E, $\mathscr{F}$, Δ_m) 是 (X, $\|\cdot\|$) 上的E-空间, 设 S 是E→E的随机算子, 设存在 $x_0(\omega)\in$E 和存在一分布函数 $G(t)$, $G(0)=0$, 满足条件 (2.1). 再设存在 $m, n\in Z^+$, $m,n\geqslant 1$,

$$(2.6)\quad F_{S^m x-S^n y}(t)\geqslant \inf_{p,q\in\{O_S(x(\omega);0,\infty)\cup O_T(y(\omega);0,\infty)\}} F_{p-q}(\Phi(t)),\quad \forall x, y\in \mathrm{E},\ t\geqslant 0.$$

则 S 在E中存在唯一随机不动点 $x_*(\omega)$, 而且序列 $\{(S^n x_0)(\omega)\}$ 依概率收敛于这一不动点.

注 1 〔1〕中的定理3 是本文推论的特例.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

注 2 〔4〕中的主要结果定理3也是本文推论的特例.

参考文献

〔1〕林熙，科学通报，第28卷，第4期（1983），199—201.

〔2〕Sherwood, H., J. London Math. Soc., 44(1969), 441—448.

〔3〕Schweizer, B., Sklar, A., Pacific J. Math., 10(1960), 313—334.

〔4〕Sehgal, V. M., Bharucha-Reid, A. T., Math. Systems Theory, 6(1972), No. 2, 97—102.

〔5〕游兆永，数学研究与评论，创刊号（1981），25—28.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.