1987年8月　　数学研究与评论
第七卷　第三期

论深入开展数学方法论研究的重要性*
——兼评《数学方法论选讲》一书

黄开斌　　郑毓信
（南京师范大学）　（南京大学）

随着数学科学的深入发展，提高数学研究的艺术，探索数学的发展规律、思想方法以及数学领域中的发现、发明和创新等法则已属事在必行．这就产生了一门学问——数学方法论

国外较早地就开展了这方面的研究工作．例如，著名数学家G．Polya 以数十年的时间致力于数学方法论的研究，他的一些专著《数学的发现》、《数学与猜想》等已成为人们从事数学方法论研究的宝贵资料．他的某些颇具启发性的论点也向数学工作者提供了发现数学真理的一些重要手段．

近年来，我国数学界在徐利治教授的积极倡导下也兴起了对数学方法论的研究．仅就高等院校而言，大连工学院、吉林大学、华中工学院、南京大学和南京师范大学等相继开设了数学方法论等专门课程，他们都取得了较好的效果．去年年底，徐利治教授著《数学方法论选讲》（华中工学院出版社，1983年，以下简称《选讲》）一书出版，当即受到数学界的广泛重视，《选讲》对国内数学方法论的研究起了推动作用，对数学的发展规律和思想方法所做的研究是精妙而深刻的，《选讲》对数学家在数学研究工作过程中心智状态的揭示和叙述，将对造就我国新的一代数学家起到重要作用．

一、《选讲》对数学方法论的研究具有一定深度

数学是一门富有概念性的学问．抽象是其特色．迄今，数学已日益渗透到科学技术的各个领域，成为一切科学得力的助手和工具．正如《选讲》所说：“为了有效地发展它、改进它、应用它或者把它很好地传授给学生们，就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握”．所以我们数学工作者应该自觉地重视数学方法论的传授和研究工作．

事实上，任何数学理论的建立与发展都有其直观背景．如果人们能够洞察这些直观背景，并通过联想力和概括力综合这些素材，从中提炼出最本质、最一般的规律，那么就能彻底弄懂数学真理，甚至导致创造、发明．《选讲》第6讲以E．Galois 建立代数方程可解性理论为例，对此做了精辟的阐述．

如所周知，Galois 是群论思想方法的重要创始人之一，是首先利用群论方法完成代数方程可解性理论的数学家．他的巨大成就是直接依靠置换群的子群结构分析，来预见代数方程根式解法预解式的形成方式和它应满足的预解方程的类型．《选讲》中强调，Galois的贡献

---

* 1984年10月27日收到．

是从杰出的数学先驱者J.L.Lagrange,C.F.Gauss 和N.H.Abel 那里努力继承了最宝贵的遗产而发展起来的,Galois 理论的建立完全符合科学研究发展的普遍规律.这种确切提法远比那些单纯地将Galois 赞誉为头等天才的说法符合客观事实,对青年一代更具有积极的启迪意义.

第六讲对Galois 创造性思维做了深入的剖析.首先追朔了研究代数方程根式解法的历史.指出Galois 是通过改进Lagrange 的思路去探讨可用根式求解的代数方程的特性.他设法绕开构造一给定多项式的Lagrange 预解式,因为这种构造需要很高的技巧,并且没有明确的方法.作者把Galois解决方程根式解难题的基本思想方法要点归结成如下三条.

(1)把层次式结构的形式同域的不断扩张概念联系起来.

(2)把每一层次的对应域的形成要素归结为预解式和预解方程的寻求.

(3)把预解式的寻求归结为置换群的各阶子群的结构分析.

这种归纳较M.kline 的简单、醒目,因而对读者的启发更为直接.

恩格斯说过,数学研究的对象是现实世界中的数量关系和空间形式.诚然,整个数学就是围绕着数与形这两个基础概念的提炼、演变与发展而发展着的.社会生产力的不断提高,为数学提供了无穷的源泉和新颖的课题.形成了数学中的许多分支科学.但是数学的各分支间是有内在联系的。《选讲》第5讲介绍了号称N.Bourbaki 学派的结构主义这一数学学派.针对当前数学研究工作中存在的研究内容过于狭窄这种现象来说,该讲是一个切中时弊的好选题.从科学方法论的角度看,《选讲》的第三讲写得饶有特色.作者以精确的数学语言陈述了数学中的关系映射反演原则,它简称RMI原则.现摘录这段原文如下:

"给定一个含有目标原象x的关系结构系统S.如果能找到一个可定映映射ϕ,将S映入或映满S^*,则可从S^*通过一定的数学方法把目标映象$x^*=\phi(x)$确定出来,从而通过反演即逆映射ϕ^{-1}便可把$x=\phi^{-1}(x^*)$确定出来".作者以框图

$$\begin{tikzcd}
\boxed{S} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, dotted] & \boxed{S^*} \arrow[d, dotted] \\
\boxed{x} & \boxed{x^*} \arrow[l, "\phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

描述了用含有目标原象x的关系结构系统S确定x的过程.全过程包括的步骤为:关系——映射——定映——反演——得解.作者对庞大数字进行开方等数值计算、射影几何中Pascal定理的建立和寻求某些幂级数的和函数等几个典型实例的分析,不仅深化了读者对数学中RMI原则的理解,而且总结出应用RMI原则处理数学问题的重要关键是选取合适的映射.如本段所述三例就是通过分别选取对数映射、射影变换和用微商算子给出的映射解决问题的.读了本讲内容,无论是在理论的阐述方面,或是在对解题过程的分析上,都给人以豁然开朗的清新感觉.当然,RMI原则不是万能的,但是它能启发人们寻求解决问题的思路.

本讲首页就明确指出,RMI原则是属一般科学方法论性质范畴的一种工作原则.内中

的映射和反演可以赋于很广泛的含义．所以RMI原则实际上是一种包罗万象的科学方法论原则．可以预感到，有些读者将会在本讲的启发下，对一些十分重要的关系结构S，巧妙地给出有用而具能行性反演ϕ^{-1}的可定映映射ϕ，做出创造性的工作．

综上所述，《选讲》对数学方法论的研究具有相当的深度．这深度既表现在对理论或学派的思想方法的剖析上，也表现在对具体数学内容中思想方法的揭示和研究上．广大数学工作者会从《选讲》一书中受到教益，更自觉地运用科学的方法论指导数学研究和教学工作．

二、《选讲》较好地做到了哲学分析与数学研究的有机结合

就对数学的发展规律、思想方法及数学中发现、发明和创新等法则的研究来说，数学方法论不仅涉及到思维对象数学本体的辩证性，而且也涉及到思维运动过程的辩证性，即认识与反映过程的辩证性．因此，正确的哲学思想——辩证唯物主义——对方法论的研究就具有特殊的意义．当然，重要的问题在于必须使哲学分析与数学研究有机地结合起来．就此而论，《选讲》第7讲关于对数学中无限这一概念的分析和研究，无疑是一个成功的尝试．

如所周知，“无限”在数学中占有异常重要的地位．H. Weyl就曾把数学说成是“无限的科学”．但自古以来，对无限概念一直存在着两种截然不同的分歧观点，致使西方数学哲学（特别是数学基础）的研究形成了许多不同的学派，如逻辑主义、直觉主义、形式主义和柏拉图主义等．究竟应该怎样去认识数学中的“无限？”怎样看待上述各个学派的数学观和方法论的主张？对这些问题的讨论构成了《选讲》中的第7—9讲．

一般说来，现代西方数学哲学中各学派的数学观都含有唯心主义的成份；但是，不可否认，在各派的数学思想和方法论的主张中也都含有合理的成份，而且，这些流派的观点和主张至今对数学体系的内在发展还继续产生着不同程度的影响．显然，处理这一问题的正确态度应是，对各学派的观点和主张进行实事求是的分析，去其糟粕，取其精华．徐利治教授对此做了大量的工作．正如作者在《选讲》一书第二页所说：“只有运用科学的反映论观点，才能从他们的观点和主张中分析总结出较为正确的数学方法论观点”．

更为可贵的是，《选讲》的作者并没有仅仅停留于对西方各种无限观的评析上，而是以正确的哲学思想为指导，对数学中无限这一概念进行了深刻的分析，并继而开展了对相应内容的数学研究工作．例如，关于潜无限和实无限辩证关系的研究，非Cantor型自然数模型的构造等．这些研究工作是值得重视的，因为它体现了将哲学分析与数学研究有机地结合起来的正确的研究方向．

三、《选讲》是深入而系统地开展数学方法论研究的指南

与数学的某些分支相比，数学方法论仍是一门新兴的学科．到目前为止，在国内外都还没有形成完整的体系，然而，科学方法论对数学发展和数学教育确实具有直接而深远的意义．因此，数学方法论的研究应是我国数学界赶超世界先进水平的一个重要组成部分．《选讲》一书的出版是很及时的，它可以进一步引导数学工作者对数学方法论进行更深入、更系统的研究．

《选讲》除具有本文在一、二中所评述的特点外，书中还包含了作者提出的许多富有启发性的问题和深刻的思想．例如，作者在该书中提出属于不同范畴的宏观的数学方法论和微

观的数学方法论这两个概念．并强调指出，既精通微观的数学方法论又懂得宏观的数学方法论，才能做出对生产技术的发展有深远影响的贡献．又如，《选讲》还讨论了收敛思维和发散思维两者间的辩证关系以及数学发明、创造的心理过程等问题．这些都是数学方法论这一学科需要继续研究的重要课题．

通观全书，我认为《选讲》也存在一些不足之处．由于作者本未打算将《选讲》撰写成一部关于数学方法论的系统论述的著作，而只是选择了十来个公认为比较有趣的专题，对它们做了介绍、分析和讨论．因此，从整体上看，《选讲》所论述的内容不够系统．在题材内容的安排上，似乎也有可商榷之处．此外，当前电脑给予数学的冲击是对现代数学发展具有决定性影响的一个不可估量的方面．数学算法化研究和计算数学软件化研究已成为不容忽视的客观趋势．《选讲》虽提到一点有关这方面的内容，但嫌太少，也是美中不足之处．尽管如此，瑕不掩玉，《选讲》仍是一本受人推崇的、对研究数学方法论有一定指导作用的论著．

参 考 文 献

[1] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press, New York, 1972（中译本：《古今数学思想》第3、4册，北大数学系数学史翻译组译，上海科学技术出版社，1980，1981）．

[2] G. Polya, Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1, Prin. Univ. Press, 1951（中译本《数学与猜想》第一卷，李心灿等译，科学出版社，1981）．

[3] 徐利治、张鸿庆，《数学直觉的意义及作用》，载《高等教育研究》，大连工学院出版，1981年第一期．