关于S—集与S—闭包

恽自求
（苏州大学）

一 导言

本文利用S-集与S-闭包的概念，来讨论S-闭空间及有关空间或映射，给出了这些空间与映射的一些性质．我们的一些结果改进或推广了〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔7〕中的相应定理．

本文未加定义而直接使用的术语与符号的意义，请参考文〔1〕、〔2〕，与〔1〕不同的只是本文除另有说明外，一般不要求拓扑空间满足任何分离性公理．

下面这条引理，文中使用较多，证明较易，故略去．

引理 1.1 对拓扑空间X，下列条件两两等价：

（1） X是T_1^*型空间．

（2） 对X中任意两个不同的点a和b，存在正则闭集P，使$a\notin$ P而$b\in$ P．

（3） 每个$x\notin$ X，$\{x\}$是X中一族正则开集之交．

利用引理 1.1，不难推出：

引理 1.2 T_1^*型空间X中的S-集是闭集．

二 S-集及S-集的象

由〔3〕例1可知，拓扑空间X的S-闭子空间可以不是X的S-集；而βN-N不是S-闭空间却是βN的S-集．因此，拓扑空间X的S-闭子空间与S-集是互相独立的两个概念，但我们却有下例结果：

定理 2.1 设W是拓扑空间X的开子集，则W作为X的子空间是S-闭的当仅当W是X的S-集．

证 若W是X的S-闭开子空间，设$\{P_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$为X中复盖W的任一正则闭集族，则对每个$\gamma\in\Gamma$，由〔4〕定理1.9，$P_\gamma\cap W$为X的半开集，又由〔5〕定理6知$P_\gamma\cap W$为子空间W的半开集，但$P_\gamma\cap W$在W中闭，因此$P_\gamma\cap W$为W的正则闭子集，于是$\{P_\gamma\cap W|\gamma\in\Gamma\}$为W的正则闭复盖，因此存在有限子复盖$\{P_{\gamma_i}\cap W|i=1,\cdots,n\}$，于是$\bigcup_{i=1}^n P_{\gamma_i}\supseteq\bigcup_{i=1}^n(P_{\gamma_i}\cap W)=W$，所以W是X的S-集．

反之，若W是X中的S-集，$\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$为W的任意半开复盖，则由于W在X中开，每个$A_\gamma$易证也为X中的半开集，因此$\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$为X中复盖W的半开集族，于是存在有限子族$\{A_{\gamma_i}|i=1,\cdots,m\}$，使$\bigcup_{i=1}^m A_{\gamma_i}\supseteq W$，因此$\bigcup_{i=1}^m A_{\gamma_i}^{-W}=\bigcup_{i=1}^m(A_{\gamma_i}^-\cap W)=W$，其中$A_{\gamma_i}^{-W}$表示$A_{\gamma_i}$在W中的闭包，所以W作为X的子空间是S-闭的．证毕．

* 1984年7月7日收到．

推论： 若拓扑空间X是有限个S-闭开子空间之并，则X是S-闭空间.

上述推论改进了Cameron的结果：

"若拓扑空间X是有限个既开又闭（Clopen）的S-闭子空间之并，则X是S-闭空间（[3]定理5）".

定理 2.2 若$f: X \to Y$是S-连续映射，则f保持S-集.

证 设A为X中S-集，$\mathscr{P}=\{P_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$为Y中复盖$f(A)$的任一正则闭集族，对任一$\gamma \in \Gamma$，令$f^{-1}(P_\gamma)=\bigcup_{t \in T_\gamma} P'_{\gamma,t}$，其中$P'_{\gamma,t}$为X中正则闭集. 则$\{P'_{\gamma,t} \mid t \in T_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$为X中复盖A的正则闭集族，从中可选出有限个集复盖A，设这有限个集分别含于$f^{-1}(P_{\gamma_1}), \cdots, f^{-1}(P_{\gamma_n})$中，则$\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(P_{\gamma_i}) \supseteq A$，因此$\bigcup_{i=1}^n P_{\gamma_i} \supseteq \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(P_{\gamma_i}))=f(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(P_{\gamma_i}))$ $f(A)$，于是$f(A)$也是Y中S-集. 证毕.

容易验证，连续的不定映射是S-连续映射，因此，下面的例2.2改进了Dickman等人的下述结果：

"若$f: X \to Y$是连续的不定映射，则f保持S-集"（[1]命题3.7）.

例 2.3 既非连续映射、又非不定映射的S-连续映射：

设X为实数集，τ_1为通常拓扑，在X上定义τ_2如下：X中的集$O \in \tau_2$当仅当$O=U-A$，其中$U \in \tau_1$而A可数. 设f为(X, τ_1)到(X, τ_2)上的恒等映射. 由于无理数集$I \in \tau_2$，因此f既非连续映射，又非不定映射. 但不难验证，τ_2中的正则闭集必是τ_1中的正则闭集，因此f是S-连续映射.

三 S-闭包

S-闭包的许多应用，建立在下面两简单引理基础上。

引理3.1 若$A \subseteq X$，$Q(A)$为X中包含A的一切正则开集之交，则$cl_S(A)=Q(A)$.

引理3.2 设$A \subseteq X$，则$A=cl_S A$当仅当A是X中一族正则开集之交。

T.Noiri在[7]中给出了局部S-闭空间极不连通的三个条件，其中第三个条件是无意义的，因为极大局部S-闭空间是离散空间，自然极不连通，下面我们给出局部S-闭空间极不连通的一个充分必要条件，我们的结果不仅统一推广了[7]的前两个条件，而且顺使改进了[2]定理6："S-闭的P_Σ型空间是极不连通的."

定理 3.3 局部S-闭空间X极不连通的充分必要条件是X中每个正则开的S-集是闭集.

证 必要性是显然的. 下面来证充分性：若X非极不连通，则存在X中的正则开集Q不是闭集，取$x \in Q^- - Q$，由[7]引理2.4，存在x的正则开邻域U是X的S-集，不难证明，$U \cap Q$为x的开邻域，但$[X-(U \cap Q)] \cap U \cap Q=\varnothing$，这与$x \in Q^-$矛盾. 证毕.

由于在P_Σ型（或几乎正则）空间中，每个开（或正则开）的S-集都是闭集，结合引理1.2得：

推论1（[7]定理3.2）T_1^*型局部S-闭空间是极不连通的.

推论2 P_Σ型局部S-闭空间是极不连通的.

推论3（[7]定理3.5）几乎正则、局部S-闭空间极不连通.

Dickman等人在[1]中证明了：

"若$f: X \to Y$是极不连通紧空间到T_2空间Y上的连续满映射，则f是S-完备映射。"[1].

（〔1〕命题3.4）

我们将这命题的条件减弱而有

定理 3.4 设X为极不连通空间，Y是PΣ型空间，若f: X→Y是闭映射且对每个$y\in Y$，$f^{-1}(y)$在X中闭，则f是S-完备映射.

证 因f是闭映射，故对任意$A\subseteq X$，有$f(A^-)\subseteq[f(A)]^-$，因X是极不连通空间，因而

$$[f(A)]^-\supseteq cl_S f(A)，于是$$

$$f(cl_S A)\supseteq f(A^-)\supseteq[f(A)]^-\supseteq cl_S f(A)$$

这证明了f是S-闭映射．又对任意$y\in Y$，$f^{-1}(y)$在紧空间X中闭，因而是X的紧子集，但容易验证，极不连通空间中的紧子集是S-集，所以f是S-完备映射．证毕

例 3.5 满足定理 3.4 的非连续映射．令（$\beta N,\tau$）为由自然数N构成的离散空间的Ston-Cech 紧化，Y为包含 βN 的一个集合，赋Y以离散拓扑 τ^*，令f为（$\beta N,\tau^*$）上恒等映射，则f满足定理 3.4 的条件但不是连续映射．

四 保持S-集或逆象保持S-集的映射

定理 4.1 若f: X→Y是S-闭空间X到Urysohn空间Y中（或T_1^*型空间Y上）的保持S-集的映射，则f是S-闭映射．特别，若这种f是S-连续的，则f是S-完备的.

证 容易证明，f是S-闭映射当且仅当f将X中一族正则开集之交映成Y中一族正则开集之交．若Y是Urysohn空间，A为X中一族正则开集之交，易证A是X的S-集．由假设，f(A)也应为Y的S-集．不难验证，Urysohn空间中的S-集必是一族正则开集之交，于是f(A)也是Y中一族正则开集之交．这证明了f是S-闭映射．若上述f是S-连续的，则由引理1.1，$\{y\}$是Y中一族正则开集之交，因此$f^{-1}(y)$应是X中一族正则开集之交，因而是X的S-集，于是f是S-完备映射.

若Y是T^*型空间且$f(X)=Y$，则因S-闭空间X是自身的S-集，Y也应是自身的S-集，即Y也是S-闭空间．由〔2〕定理3，Y是极不连通的．因而Y也是Urysohn空间 证毕

〔8〕中称逆象保持S-集的映射为紧映射，并证明了：

“若f：X→Y是连续紧映射且Y是局部紧、T_2空间，则f是闭映射”（〔8〕定理2）.

我们有下面类似的定理：

定理 4.2 若f: X→Y是逆象保持S-集的a·c.S映射且Y是局部S-闭、T_1^*型空间，则f是正则闭映射．其中，f称为a·c·S映射（既在Singal意义下几乎连续[6]），如果Y中每个正则闭集的逆象为X中闭集；f称为正则闭映射[9]，如果X中每个正则闭集的象是Y中闭集.

定理4.2的证明需要以下两个引理：

引理 4.3 设A为X中正则闭集，B为X中既开又闭的S-集，则A∩B也是X的S-集.

引理 4.4 设f：X→Y是a·c·S映射且Y为极不连通空间，则f保持S-集.

定理4.2的证明：

设P为X中任意正则闭集．若f(P)不在Y中闭，取$y\in[f(P)]^- - f(P)$，因Y是局部S-闭空间，由〔7〕引理 2.4，存在y的正则开邻域U，U是Y的 S-集．下证$f(P)\cap U$不是Y的S-集．否则由引理 1.2，$f(P)\cap U$是Y中闭集，因而〔Y-（$f(P)\cap U$）〕∩U为y的开邻域，但〔Y-（$f(P)\cap U$）〕∩U∩$f(P)=\varnothing$，这与$y\in[f(P)]^-$相矛盾.

但因f是逆象保持S-集的映射，$f^{-1}(U)$是X中S-集。由〔7〕定理3.2知Y为极不连通空间，因而U也是Y中正则闭集，于是$f^{-1}(U)$是X中既开又闭集，由引理4.3，$P\cap f^{-1}(U)$是X中的S-集，又由引理4.4得$f(P)\cap U=f[P\cap f^{-1}(U)]$应是Y中S-集，这与上面所证$f(P)\cap U$不是S-集矛盾，这就说明$f(P)$只能是Y中闭集，由P的任意性知$f$是正则闭映射，证毕。

用类似的方法，不难证明下面结果。

定理4.5 设$f: X\to Y$是逆象保持S-集的a·c·S映射且X是PΣ型空间而Y是T_1^*型局部S-闭空间，则f是闭映射。

本文得到高国士老师的指导，谨此致谢。

参 考 文 献

〔1〕 Dickman, R.F.Jr, and Krystock, R.L., S-set and S-perfect mapping, Proc. Amer. Math. Soc., 80(1980), 687-692.

〔2〕 王国俊，S-闭空间的性质，数学学报，24(1981), 55-63.

〔3〕 Cameron, D.E., Properties of S-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 72(1978), 581-586.

〔4〕 Crossley, S.Gene and Hildebrand, S.K., Semi-closure, Trans. J. Sci., 22(1971), 99-112.

〔5〕 Levine, N., Semi-open setsand Semi-continuity in topological space, Amer Math. Monthly, 70(1963), 36-41.

〔6〕 Singal, M.K. and Singal, A.R., Almost-continuous mappings, Yokohama MathJ., 16(1968), 63-73.

〔7〕 Noiri, T., A note on extremally disconnected spaces, Proc. Amer. Math Soc., 79(1980), 327-330.

〔8〕 Halfar, E., Compact mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), 828-830.

〔9〕 Dickman, R.F.Jr, Regular closed mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 39(1973), 414-416.