# 第（16）类压缩映象的不动点定理*

仲跻春

（江苏淮阴中学）

设（X，$d$）是完备的度量空间，$T$是X到X的映象，对任何$x$，$y\in$ X，$x\neq y$．满足

$$d(Tx,\ Ty)<\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Tx),\ d(y,\ Ty),\ d(x,\ Ty),\ d(y,\ Tx)\}. \qquad (1)$$

张石生称[1]此类$T$为第（16）类压缩型映象，并且他在〔2〕〔6〕中给出了关于该类映象不动点的两个定理．除此而外，有关这个问题的更多更好的结果似乎并不多见．如所知，这类映象不动点的存在性仍属一个未完全解决的问题．在本文中，我们就这类映象不动点的存在性提出了一些新的条件．对$T$是连续的情形，得到了第（16）类映象存在不动点的充要条件，这与〔2〕的定理2相比似乎较优一些．最后用新的方法证明紧空间上连续的第（16）类压缩型映象必有不动点．

从不等式（1）易知

**定理1**　若第（16）类压缩型映象存在不动点，则必唯一．

**定理2**　设$T$是第（16）类压缩型映象，如果存在$x\in$ X及自然数$n$，使$T^nx=x$，则$T$有唯一的不动点$x$．

**证明**　若$Tx\neq x$，则使$T^nx=x$的$n\geqslant 2$．无妨设$n$是使$T^px=x$（$p$为自然数）的最小自然数．由此易知$T^{n-1}x,T^{n-2}x,\cdots,Tx$，$x$两两不等．

考虑$k$是非负整数，$m$是自然数，且$k<m$，$1< m\leq n-1$（此时$0\leq k\leq n-2$）．

（Ⅰ）当$k\geqslant 1$时，注意$T^{n-1}x$，$T^{n-2}x$，$\cdots$，$Tx$，$x$两两不等，由不等式（1）

$$d(T^mx,\ T^kx)<\max\{d(T^{m-1}x,\ T^{k-1}x),d(T^{m-1}x,\ T^mx),\ d(T^{k-1}x,\ T^kx),$$
$$d(T^{m-1}x,\ T^kx),\ d(T^{k-1}x,\ T^mx)\} \qquad (2)$$

（Ⅱ）当$k=0$时，$T^kx=x$，按距离的对称性知．

$d(T^mx,\ T^kx)=d(T^mx,\ x)=d(T^mx,T^nx)=d(T^nx,\ T^mx)$而$m\geqslant n-1<n$，$T^{n-1}x\neq T^{m-1}x$，仍由不等式（1）

$$d(T^nx,\ T^mx)<\max\{d(T^{n-1}x,\ T^{m-1}x),\ d(T^{n-1}x,\ T^nx),\ d(T^{m-1}x,\ T^mx),$$
$$d(T^{n-1}x,\ T^mx),\ d(T^{m-1}x,\ T^nx)\}=\max\{d(T^{n-1}x,\ T^{m-1}x),\ d(T^{n-1}x,\ x)$$
$$d(T^{m-1}x,\ T^{m-1}x),\ d(T^{n-1}x,\ T^mx),\ d(T^{m-1}x,\ x)\}$$

因此

$$d(T^mx,\ T^kx)<\max\{d(T^{n-1}x,\ T^{m-1}x),\ d(T^{n-1}x,\ x),\ d(T^{m-1}x,\ T^mx),d(T^{n-1}x,$$
$$T^mx),\ d(T^{m-1}x,\ x)\} \qquad (3)$$

对一切满足$0\leq k<m$，$1<m\leq n-1$的$k$，$m$，命所有的$d(T^mx,\ T^kx)$再添上0所构成的集合为C，则C正是由不等式（2），（3）左端所有的$d(T^mx,\ T^kx)$再添上0所成之集．于是$d(T^{k-1}x,\ T^kx)=d(T^kx,\ T^{k-1}x)\in$ C，$d(T^{m-1}x,\ T^mx)=d(T^mx,\ T^{m-1}x)\in$ C，

1984年10月12日收到.

$d(T^{k-1}x, T^m x)=d(T^m x, T^{k-1}x)\in C$. 从而不等式（2）、（3）右端大括号内所有的$d(T^s x, T^t x)\in C$.

命$a=\max\limits_{d(T^s x, T^t x)\in C} d(T^m x, T^k x)$，则不等式（2）、（3）的右端之值均不超过$a$，故总有

$$d(T^m x, T^k x)<a \quad (0\leq k<m, \ 1\leq m\leq n-1) \tag{4}$$

但$n$是固定的自然数，故C必是有限集，因而有非负整数$m_0$，$k_0$满足$0\leq k_0<m_0\leq n-1$，使$a=d(T^{m_0}x, T^{k_0}x)$，所以由（4）得$d(T^{m_0}x, T^{k_0}x)<d(T^{m_0}x, T^{k_0}x)$，矛盾. 故必$Tx=x$. 即$T$有不动点$x$. 唯一性由定理1推知.

注：在$T$是连续的情形，定理2有更简洁的证法. 因为在定理的条件下，易知序列$\{T^m x\}$是有限集，因此$\{T^m x\}$的闭包$\overline{\{T^m x\}}$是紧集，仿〔2〕中定理1的证法立得本定理.

**推论** 设$T$是第（16）类压缩型映象，如果存在$x\in X$及非负整数$m$、$n$（$m>n\geq 0$），使得$T^m x=T^n x$，则$T$必有唯一的不动点$T^n x$.

**证明** 因$m>n$，有自然数$k$，使$m=k+n$，于是$T^k(T^n x)=T^n x$，由定理2推论得证.

**引理** 设（X，$d$）是度量空间，$T$是X到X的连续映象. 对$x\in X$，若序列$\{T^n x\}$有聚点$x_0$，则$\{T^n x\}$有下列聚点：$x_0$，$Tx_0$，…，$T^n x_0$，….

**证明** 设$x_0$是序列$\{T^n x\}$的聚点. 那么存在$\{T^n x\}$的子列$\{T^{n_i}x\}$，使$T^{n_i}x\to x_0(n_i\to\infty)$. 根据$T$的连续性，$T^{n_i+1}x\to Tx_0(n_i\to\infty)$，即$Tx_0$也是序列$\{T^n x\}$的聚点. 同理，$T^2 x_0$仍是$\{T^n x\}$的聚点. 类推下去可知，对任何自然数$n$，$T^n x_0$都是$\{T^n x\}$的聚点.

根据引理和定理2的推论立即可得

**定理3** 设$T$是第（16）类压缩型映象，且$T$连续. 若存在$x\in X$，使$\{T^n x\}$有聚点$x_0$并且聚点$x_0$，$Tx_0$，…，$T^n x_0$，…中至少有两个相同，则$T$以$\{T^n x\}$的某个聚点为唯一不动点.

定理3的特例是

**定理4** 设$T$是第（16）类压缩型映象，$T$连续. 若有$x\in X$，使$\{T^n x\}$有有限个聚点，则$T$以$\{T^n x\}$的某聚点为唯一不动点.

**定理5** 设$T$为第（16）类压缩型映象，$T$连续，$x\in X$，$\{T^n x\}$有聚点. 那么$T$以$\{T^n x\}$的聚点为不动点的充要条件是$\{T^n x\}$收敛。

**证明** 充分性显然。

必要性. 设$\{T^n x\}$有聚点$x_0$，使$Tx_0=x_0$。于是有$\{T^n x\}$的子列$\{T^{n_i}x\}$，使$T^{n_i}x\to x_0$（$n_i\to\infty$）。按引理的证明知，对任何自然数$k$，$T^{n_i+k}x\to T^k x_0$（$n_i\to\infty$）. 但$Tx_0=x_0$，故$T^k x_0=x_0$（$k=1,2,\cdots$）. 即$\{T^n x\}$的子列$\{T^{n_i+k}x\}$（$k\geq 0$）都收敛于$x_0$。

命$A=\{a|a$是$\{T^n x\}$的收敛于$x_0$的子列$\}$

在A中规定关系为集合间的包含关系“$\subseteq$”，则A按“$\subseteq$”构成半序集[3]（以下所指的极大元、全序集、上界、上确界均见〔3〕）. 我们指出：A有极大元。

其实，据〔3〕，A有极大全序子集. 设$A_*$是A的任一非空全序子集. 记$a_0=\bigcup\limits_{a_*\in A_*}a_*$，那么

$a_0$是$A_*$ 的一个上界．另设$a_1$也是$A_*$的上界．任取$T^{n_i'}x\in a_0$，则有$a_*\in A_*$，使$T^{n_i'}x\in a_*$．因$a_1$是$A_*$的上界，故$a_*\subseteq a_1$，从而$T^{n_i'}x\in a_1$，于是$a_0\subseteq a_1$．所以$a_0$是$A_*$的上确界．因此A的一切非空全序子集都有上确界．由$Zorn$ 引理[3]，A存在极大元$\beta$．即存在$\{T^n x\}$ 的一个子列$\{T^{m_k}x\}=\beta$，使任意$a\in A$，均有$a\subseteq\beta=\{T^{m_k}x\}$，且$T^{m_k}x\to x_0$ $(m_k\to\infty)$．

设$\{T^{m_k}x\}\neq\{T^n x\}$．因$\{T^{m_k}x\}\subseteq\{T^n x\}$，令

$$\{T^{m_k'}x\}=\{T^n x\}-\{T^{m_k}x\}$$

显然，$\{T^{m_k'}\}$ 不能是有限集，否则$\{T^{m_k}x\}\subsetneq\{T^{m_k}x\}\cup\{T^{m_k'}x\}\in A$，与$\beta=\{T^{m_k}x\}$ 是A的极大元矛盾．注意，$\{T^{m_k}x\}\cap\{T^{m_k'}x\}=\phi$，于是可选出$\{T^{m_k}x\}$ 的子列$\{T^{m_{k_p}}x\}$ 和$\{T^{m_k'}x\}$ 的子列$\{T^{m_{k_p}'}x\}$，满足$T^{m_{k_p}+1}x=T^{m_{k_p}'}x(p=1,2,\cdots)$．

然而$T^{m_k}x\to x_0$，故$T^{m_{k_p}}x\to x_0$，由$T$的连续性知$T^{m_{k_p}+1}x\to Tx_0=x_0$，所以$T^{m_{k_p}'}x\to x_0$．显然$\{T^{m_{k_p}'}x\}\cup\{T^{m_k}x\}\in A$，且$\beta=\{T^{m_k}x\}\subsetneq\{T^{m_{k_p}'}x\}\cup\{T^{m_k}x\}$，这与$\beta$ 是A的极大元矛盾．所以必有$\{T^{m_k}x\}=\{T^n x\}$，即$\{T^n x\}$收敛于$x_0$．

**定理6** 设$T$是紧空间（X，$d$）上的第（16）类压缩型映象，且$T$连续，则$T$必有唯一不动点．

**证明** 任选$x\in$ X．因X紧，$\{T^n x\}$ 存在聚点$x_0$．由引理，$x_0$，$Tx_0$，…，$T^k x_0$，…都是$\{T^n x\}$的聚点．另一方面，令

$$A=\{a\,|\,a\text{是}\{T^n x\}\text{的仅以}x_0,Tx_0,\cdots,T^k x_0,\cdots\text{中的某些为聚点的子列}\}$$

容易明白，A是非空的．仿照定理5 必要性的证法，知A有极大元$\beta=\{T^{m_k}x\}$．易见$\{T^{m_k}x\}$有且只有聚点$x_0$，$Tx_0$，…，$T^k x_0$，…．如果$\{T^{m_k}x\}\neq\{T^n x\}$，仍和定理5 必要性最后的证法一样将导致矛盾．所以$\{T^{m_k}x\}=\{T^n x\}$．于是$\{T^n x\}$有且只有聚点$x_0$，$Tx_0$，…$T^k x_0$，…

现在，命

$$A_k=\{a\,|\,a\text{是}\{T^n x\}\text{的收敛于}T^k x_0\text{的子列}\}$$

其中$k=0,1,2,\cdots$．仿定理5 必要性的证法，知$A_k$有极大元$a_k$（$\{T^n x\}$的子列）．这里$k=0,1,2,\cdots$．

反设$x_0$，$Tx_0$，…，$T^k x_0$，…两两不等．根据$a_k\in A_k$的极大性，对$k=1$，有$T^{n_1}x\in a_0$．然后，存在$T^{n_2}x\in a_2$，但$T^{n_2}x\notin a_0$且$T^{n_2}x\notin a_1$．否则必有$a_2$的子列收敛于$x_0$或$Tx_0$，由极限的唯一性，定有$T^2x_0=x_0$或$T^2x_0=Tx_0$，与假设矛盾．故这样的$T^{n_2}x$存在．同理，对每个自然数$k$，存在$T^{n_k}x\in a_k$，但$T^{n_k}x\notin a_j$($j=0,1,2,\cdots,k-1$)．从而得到序列$\{T^{n_k}x\}\subseteq\{T^n x\}$．由$\{T^{n_k}x\}$ 的构造，$\{T^{n_k}x\}$的任一子列不含于任一$a_k$($k=0,1,2,\cdots$)．依$X$的紧性，$\{T^{n_k}x\}$有收敛子列$\{T^{n_{k_i}}x\}$．但$\{T^n x\}$ 有且只有聚点$x_0$，$Tx_0$，…，$T^k x_0$，…，故其子列$\{T^{n_{k_i}}x\}$只能收敛于某个$T^{k_0}x_0$．从而$\{T^{n_{k_i}}x\}\cup a_{k_0}$也收敛于$T^{k_0}x_0$，这与$a_{k_0}$是$A_{k_0}$的极大元相矛盾．故$x_0$，$Tx_0$，…，$T^k x_0$，…中必有两个相等．依推论，$T$有唯一的不动点

**几点评注** 1）定理2 及其推论把第（16）类压缩型映象$T$的不动点的存在归结为映象族$\{T^n\}$ 中任一个映象不动点的存在性，因而拓宽了寻找这类映象不动点的途径．

2）定理3 、4 成立的基础是定理2 及其推论．但在使用上，定理3 、4 、可能更为方便，其条件被满足的可能性也较大．其次，定理3 、4 、5 基本上回答了张石生在〔4〕中提出的问题：对于连续的第（16）类压缩型映象，如果有$x_0\in$ X，使$\{T^n x_0\}$ 有聚点，$T$是

否有不动点？

3）关于第（16）类压缩型映象，*Rhoades* 在〔5〕中曾指出："$T$的连续性及对某一$x_0 \in X$，迭代序列有一聚点是保证该类映象存在不动点的必要条件。"但本文显示，情况并非完全如此，如定理2．对$T$的连续性，我们认为，只是在为使序列$\{T^n x\}$的聚点成为$T$的不动点时才有必要．

4）在本文的所有结论中，映象$T$所在空间（X，$d$）的完备性未起任何作用，故可以取消．

## 参 考 文 献


〔1〕张石生，不动点理论的新发展（Ⅰ），数学研究与评论，第2卷，第3期（82），136

〔2〕张石生，关于压缩型映象的一个未解决问题，数学物理学报，第3卷，第2期（83），197—200

〔3〕郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要（第一册），人民教育出版社（80），22—26

〔4〕张石生，不动点理论的新发展（Ⅱ），数学研究与评论，第3卷，第2期（83），128

〔5〕B. E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. V. 226 (1977), 257—290

〔6〕张石生，关于压缩映象的一个未解决问题及一个新的不动点定理，数学年刊，第3卷，第2期（82），179—181


# The Fixed Point Theorem of The Contractive Mapping (16)


*Zhong Ji chun*

(Jiangsu Huaiyin Middle School)


## Abstract


Let X be a complete metric space with distance function $d$, and $T$ a mapping from X into X. $T$ is said to be a contractive mapping (16), if for any $x$, $y \in X$, $x \neq y$, it satisfies the following condition

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

In this paper, We present serveral new fixed point theorems for mapping (16). Main results are as following:

**Theorem 2** Let $T$ be a contractive mapping (16), if there exists an element $x \in X$ and natural number $n$ such that $T^n x = x$, then $x$ is a nuique fixed point of $T$.

**Theorem 5** Let $T$ be a contractive mapping (16) and continuous, if for $x \in X$, the sequence $\{T^n x\}$ has an accumulation $x_0$, then $x_0$ is a fixed point of $T$ if and only if the sequence $\{T^n x\}$ is convergent.