1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

关于予解式的收敛性*

马绍芹

（河北大学）

近来S. Reich对予解式相容性（Consistency）的问题，以及其他与此有关的问题，得到了较好的结果（见文［1］，定理2．1和文［2］定理1）．本文的目的是对Reich的结果进一步加强和改进．具体说我们得到予解式的收敛关于参数λ是一致的．

§1．某些予备知识

为了方便起见，我们简略地叙述一下某些予备知识．令E是任一实Banach空间，E^*是它的对偶空间，并令

$$J(x)=\{x^*\in E^*;\ (x,x^*)=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}.$$

我们称J为E到E^*的对偶映象（一般是多值的）．

如果A是E×E中的一个子集，$x\in E$，我们则令$Ax=\{y\in E;\ [x,y]\in A\}$，$D(A)=\{x\in E;\ Ax\neq\phi\}$．A的值域是$R(A)=\bigcup\{Ax;\ x\in D(A)\}$，A的逆由$A^{-1}y=\{x\in E;\ [x,y]\in A\}$来定义．如果对于任意的$x_i\in D(A)$和$y_i\in Ax_i$（$i=1,2$）都存在$j\in J(x_1-x_2)$，使得$(y_1-y_2,j)\geq 0$，则A叫做增生的（accretive）．令I表示恒等算子，一个增生集A，如果满足$R(I+A)=E$（由此推出对所有$r>0$，$R(I+rA)=E$），则A叫做m－增生的．如果A是增生的，则对所有的$r>0$，我们能定义非膨胀的单值映象$J_r=(I+rA)^{-1}$：$R(I+rA)\to D(A)$．我们称它为A的予解式．如果－A是增生的（或m－增生的），则A叫做耗散的（或m－耗散的）．如果A是E×E中的增生集，且对所有$r>0$满足$R(I+rA)\supset\overline{D(A)}$，则存在一个在$\overline{D(A)}$上的（非线性）压缩半群S，使得对每个$x\in\overline{D(A)}$和$t\geq 0$．

$$S(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}x.$$

并且在t的任何有界区间［0，T］（$T>0$任意）上是一致收敛的（参看［3］，101页）．我们称$S(t)$是由－A所产生的半群．令C是E的子集．我们将用以下记号：

$$|C|=\inf\{\|x\|;\ x\in C\}.$$

我们还将用到Banach空间E的范数Gâteaux可微（此时E叫做光滑的）、一致Gâteaux可微、Fréchet可微、一致Fréchet可微（此时E叫做一致光滑的）等概念（例如参看［1］，148—149）．

* 1984年12月10日收到．

§2. 予解式相容性

下面所要证明的定理1是文[1]中定理2．1的加强和改进．

定理1 令E是具有一致Gâteaux可微范数的自反Banach空间，D是E的一个闭凸子集，C是D的一个非膨胀的收缩核（retract）（见[1]，149页）．令$F(t): D\to C$（$0\le t<\infty$）是一族非膨胀的映象（当$x\in C$，$F(0)x=x$），使得对于$x\in C$，$F(t)x$在$t\ge 0$连续，对于$x\in D$，$F(t)x$在$t>0$连续．如果对于每个$x\in C$，

$$\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{t}{n}\right)^{n}x=S(t)x \tag{1}$$

在t的任何有界区间$[0,T]$（$T>0$任意）上一致地存在，则对于每个$x\in D$，

$$\lim_{t\to 0}\left(I+\frac{\lambda}{t}(I-F(t))\right)^{-1}x=J_{\lambda}x \tag{2}$$

在λ的任何有界区间$[a,b]$（其中$0<a<b<\infty$任意）上一致地存在．如果令

$$C_0=\left\{x\in C;\ \limsup_{t\to 0}\left\|\frac{x-F(t)x}{t}\right\|<\infty\right\},$$

则对于每个$x\in\overline{C_0}$，（2）中的极限在λ的任何有界区间$[0,A]$（$A>0$任意）上一致地存在．

注1 文[1]定理2．1只是证明了对固定的$\lambda>0$，（2）中的极限存在．

定理1的证明．对于$t>0$，令$A(t)=(I-F(t))/t$，则$A(t)$是定义在D上的增生算子．当$x\in D_{\lambda,t}$，令

$$y_{\lambda,t}(x)=\left(I+\frac{\lambda}{t}(I-F(t))\right)^{-1}x=(I+\lambda A(t))^{-1}x\quad(\lambda>0),$$

其中$D_{\lambda,t}=R(I+\lambda A(t))$．显然$D_{\lambda,t}\supset D$（参看[1]，定理2．1的证明的开始处）．现在令$x\in D\subset D_{\lambda,t}$（$\lambda>0$，$t>0$），由[4]，65页，引理2．1（注意我们这里是$\omega=0$的情形），可见$\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)y_{\lambda,t}(x)\in D_{\mu,t}=R(I+\mu A(t))$（$\mu>0$），并且

$$y_{\lambda,t}(x)=y_{\mu,t}\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)y_{\lambda,t}(x)\right). \tag{3}$$

再根据$(I+\mu A(t))^{-1}$的非膨胀性，我们有

$$\|y_{\mu,t}(x)-y_{\lambda,t}(x)\|=\left\|y_{\mu,t}(x)-y_{\mu,t}\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)y_{\lambda,t}(x)\right)\right\|\le\left|\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right|\cdot\|x-y_{\lambda,t}(x)\|.$$

由（2），$\lim_{t\to 0}y_{\lambda,t}(x)=J_{\lambda}x$，所以对固定的$x\in D$，函数族$\{y_{\mu,t}(x);\ 0<t<a,$ a充分小$\}$在每点λ（$0<\lambda<\infty$）处是等度连续的．

另一方面，可按[1]，156页中的方法构造一个增生集$A\subset E\times E$，而且$D(A)\subset C$，$R(I+\lambda A)\supset D$（$\lambda>0$）．令$\tilde{J}_{\lambda}$是A的予解式。它的定义域$D(\tilde{J}_{\lambda})=R(I+\lambda A)$，对于$x\in D$，则$\tilde{J}_{\lambda}x=J_{\lambda}x$．这里$J_{\lambda}(x)$即（2）中的极限．再一次应用[4]，65页，引理2．1则当$x\in R(I+\lambda A)=D(\tilde{J}_{\lambda})$时，$\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\tilde{J}_{\lambda}x\in D(\tilde{J}_{\mu})=R(I+\mu A)$，且

$$\tilde{J}_{\lambda}x=\tilde{J}_{\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\tilde{J}_{\lambda}x\right)(\lambda,\mu>0). \tag{4}$$

特别当$x \in D$时，由（4）我们同样推出$\tilde{J}_\mu x$，也就是$J_\mu x$是μ的连续函数（$\mu > 0$）.

于是我们得到了以下结论：对于给定的$\varepsilon > 0$，存在正数δ和正数$\eta = \eta(\varepsilon, \lambda)$，使得当$0 < t < \delta$，$\mu \in (\lambda - \eta, \lambda + \eta)(0 < a \leqslant \lambda < b < \infty)$时，成立

$$\| y_{\mu, t}(x) - J_\mu x \| < \varepsilon (x \in D).$$

由Borel有限复盖定理，得知$\lim\limits_{t \to 0^+} y_{\mu, t}(x) = J_\mu x (x \in D)$在$[a, b]$上关于$\mu$一致地成立．这里$a$和$b$是满足$0 < a < b < \infty$的任意两个确定的数.

令$x \in C_0 = \{x \in C;\ \limsup\limits_{t \to 0^+} \| \frac{x - F(t)x}{t} \| < \infty\}$．并令

$$(A(t))_\lambda x = \frac{x - y_{\lambda, t}(x)}{\lambda} \quad (t > 0,\ \lambda > 0),$$

其中$y_{\lambda, t}(x) = (I + \lambda A(t))^{-1} x$．注意到$C \subseteq D \subset R(I + \lambda A(t))\ (\lambda > 0)$，所以由［3］，73页，命题3・2，我们有（注意到$F(t)$是单值的）：

$$\| x - (I + \lambda A(t))^{-1} x \| = \lambda \| (A(t))_\lambda x \| \leqslant \lambda | A(t) x | = \lambda \| A^\circ (t) x \|$$
$$= \lambda \| \frac{I - F(t)}{t} x \|.$$

因$x \in C_0$，从而$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} (I + \lambda A(t))^{-1} x = x$关于$t$（$0 < t \leqslant a$，$a$充分小）一致地成立．如果在$\lambda = 0$处定义$y_{0, t}(x) = x$，则函数族$\{y_{\lambda, t}(x);\ 0 < t \leqslant a,\ a$充分小$\}$在$\lambda = 0$处也是等度（右）连续的．另外，当$x \in C$时，$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} J_\lambda x = x$（见［1］，156页）．总之，函数族$\{y_{\lambda, t}(x);\ 0 < t \leqslant a,\ a$充分小$\}(x \in C_0)$在$0 \leqslant \lambda < \infty$的每点$\lambda$处是等度连续的，$J_\lambda (x) (x \in C)$在$0 \leqslant \lambda < \infty$的每点$\lambda$处也连续（在$\lambda = 0$，定义$J_0 x = x$）．所以$\lim\limits_{t \to 0^+} y_{\lambda, t}(x) = J_\lambda x\ (x \in C_0)$在$\lambda$的任何有界区间$[0, \Lambda](\Lambda > 0$任意$)$上关于$\lambda$一致地成立．由$y_{\lambda, t}(x)$及$J_\lambda x$的非膨胀性，容易验证上述结论对$x \in \overline{C_0}$亦成立．证毕.

特别当$F(t) = S(t)$是C上的（非线性）压缩半群时，则结论更好一些.

定理2 令E是具有一致Gâteaux可微范数的自反Banach空间，C是E的一个闭凸子集，S(t)是C上的非线性压缩半群．则对任何$x \in C$，

$$\lim_{t \to 0^+} \left(I + \frac{\lambda}{t}(I - S(t))\right)^{-1} x = J_\lambda x \tag{5}$$

在λ的任何有界区间$[0, \Lambda](\Lambda > 0$任意$)$上一致地存在.

证明 只需在上面的定理1中，令$C = D$，$F(t) = S(t)$，并注意集$\{x \in C;\ \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{x - S(t)x}{t}$存在$\}$在C中稠密（见［1］，定理3.1）．证毕.

跟予解式相容性有关的另一问题是文［2］中定理1所表述的内容（它曾作为未解决的问题而在文［1］，164页中提出来）．如果Banach空间E是一致凸和一致光滑的，则其结论仍能加强，而且$\overline{D(A)}$是凸的假设可以去掉，它已蕴含在其它的条件中．具体说我们有以下的

定理3．令E是一致凸和一致光滑的Banach空间（即E和它的对偶空间E^*都是一致凸的），$\{A_n;\ n = 1, 2, \cdots\}$是E中的$m$-增生算子叙列，$J_{r, n} = (I + rA_n)^{-1} (r > 0)$是$A_n$

的预解式以及S_n是由$-A_n$产生的非线性压缩半群．令A是另一m-增生算子，$J_r=(I+rA)^{-1}(r>0)$是它的预解式和S是由$-A$所产生的非线性压缩半群．假设对每个$x\in\overline{D(A)}$，存在叙列$\{x_n\}$，使得$x_n\in\overline{D(A_n)}$和$x_n\to x$．并假设：如果$x_n\in\overline{D(A_n)}$和$x_n\to x\in\overline{D(A)}$，则在$t$的任何有界区间$[0,T](T>0$任意)上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t)x_n=S(t)x\quad(t\geq 0). \tag{6}$$

则当$x_n\in D(A_n)$和$x_n\to x\in\overline{D(A)}$时，我们有

$$\lim_{n\to\infty} J_{r,n}x_n=J_r x\quad(\text{对每个 } x\in\overline{D(A)}), \tag{7}$$

而且在r的任何有界区间$[0,R](R>0$任意)上是一致收敛的（当$r=0$时，定义$J_{0,n}x=x$，$J_0x=x$）．

注2　文[2]定理1只是证明了对固定的$r>0$，(7)中的极限存在，且等于J_rx．

定理3的证明　首先我们注意，由于E是一致凸的，以及A是$E\times E$中的m-增生子集，所以$\overline{D(A)}$是凸的（参看[5]，382页）另外，在定理的假设条件下，由$J_{r,n}$和J_r的膨胀性，我们容易验证：当$r>0$时，(7)与

$$\lim_{n\to\infty} J_{r,n}x=J_r x\,(\text{对每个 } x\in\overline{D(A)}) \tag{8}$$

是等价的．同样容易验证(7)在r的任何有界区间$[0,R]$上收敛关于r的一致性与(8)在$[0,R]$上收敛关于r的一致性是等价的．因E是一致凸和一致光滑的，而且$A_n(n=1,2,\cdots)$和A是E中的m-增生算子，所以由(8)我们得到以下的结论，对每个$x\in D(A)$，有叙列$x_n\in D(A_n)$，使$x_n\to x$和$A_n^\circ x_n\to A^\circ x$，其中$A_n^\circ x_n$和$A^\circ x$分别表示集$A_nx_n$和$Ax$中具有最小范数的元素（参看[3]，75页，命题3.5和[2]，80页；又参看[6]，18页）．令

$$(A_n)_r=\frac{1}{r}(I-J_{r,n}),\quad A_r=\frac{1}{r}(I-J_r)\,(r>0).$$

于是（参看[3]，73页，命题3.2）：

$$\|x_n-J_{r,n}x_n\|=r\|(A_n)_rx_n\|\leqslant r|A_nx_n|=r\|A_n^\circ x_n\|, \tag{9}$$

这里$x_n\in D(A_n)$，而$x_n\to x\in D(A)$，$A_n^\circ x_n\to A^\circ x$．所以（由(9)）$\lim\limits_{r\to 0} J_{r,n}x_n=x_n$关于$n$一致地成立，又因

$$\|x-J_rx\|=r\|A_rx\|\leqslant r|Ax|=r\|A^\circ x\|\quad(x\in D(A)),$$

$$\|x-J_{r,n}x\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-J_{r,n}x_n\|+\|J_{r,n}x_n-J_{r,n}x\|$$
$$\leqslant 2\|x-x_n\|+\|x_n-J_{r,n}x_n\|,$$

所以$\lim\limits_{r\to 0^+} J_{r,n}x=x\,(x\in D(A))$也关于$n$一致地成立且$\lim\limits_{r\to 0^+} J_rx=x\,(x\in D(A))$．由于$J_{r,n}$和$J_r$是非膨胀的，所以上述结论对$x\in\overline{D(A)}$照样成立．用类似本文定理1的证明，我们同样可证对于$x\in\overline{D(A)}$，函数族$\{J_{r,n}x;\ n=1,2,\cdots\}$在$r>0$的每点处是等度连续的，而且$J_rx$在$r\geqslant 0$的每点处也是连续的．这就证明了(8)在$r$的任何有界区间$[0,R](R>0$任意)上关于$r$一致地成立；从而(7)在$r$的任何有界区间$[0,R]$上也关于$r$一致地成立．证毕．

注3　如果在定理3中不假定E是一致凸和一致光滑的，而假定E是具有一致Gateaux可微范数的自反Banach空间，再补充假设：$\overline{D(A)}$是凸的．那么用类似于定理1的证法，

我们仍可证明（7）在r的任何有界区间［a，b］上关于r一致地成立，其中a和b是满足$0<a<b<\infty$的任何两个实数.

参 考 文 献

［1］Reich, S., Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators, J. Functional Analysis, 36, 147—168(1980).

［2］———, Convergence end approximation of nonlinear semigroups, J. Math. Anal. Appl. 76, 77—83 (1980).

［3］Barbu, V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff International publishing Leyden The Netherlands, 1976.

［4］Brezis, H. and pazy, A., Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Functional Analysis, 9, 63—73 (1972).

［5］————————, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math. 8 (1970), 367—383.

［6］Brezis, H., Newresults concerning monotone operators and nonlinear semigroups, in proc. Symp. on Functional and Numerical Analysis of Nonlinear problems, pp. 1—26, Kyoto, 1974.