# S—可分解算子的谱对偶定理

张莫宙 王漱石

（华东师范大学） （湖州师范专科学校）

关于 $s$ 剩余可分解算子已有过一些讨论[2][3][4][5]，但是完整的谱对偶定理尚未建立．王声望在〔1〕系统地建立了闭可分解算子的谱对偶理论，我们把它移植到 S 可分解的情形．然而这一推广并不是平凡的．有一些准备工作见作者的论文〔7〕．本文的定理 1 给出稠定 $s$ 可分解算子的谱子空间的对偶关系，定理 3 证明当 $T$，$T^*T^{**}$ 稠定时由 $T^*$ 为 $S$-可分解知 $T$ 为 $S$-可分解．从而，完整地建立起 S 可分解算子的对偶理论．

本文中以 $C$ 和 $C_\infty$ 分别记复平面和扩充的复平面，$C(X)$ 是复 Banach 空间 $X$ 上闭算子的全体．若 $T\in C(X)$，$D_T$ 为 $T$ 的定义域，$\rho(T)$，$\sigma(T)$，$\sigma_e(T)$ 分别记 $T$ 的予解集、谱和扩充谱，$\sigma(x, T)$ 和 $\sigma_e(x, T)$ 为 $T$ 的局部谱和局部扩充谱，这里 $\sigma_e(x, T)=\sigma(x, T)$（若 $\tilde{x}(\cdot)$ 以 $\infty$ 为正则点），$\sigma_e(x, T)=\sigma(x, T)\cup\{\infty\}$（若 $\tilde{x}(\cdot)$ 以 $\infty$ 为奇点）．X 的闭子空间 Y，如有 $T(Y\cap D_T)\subset Y$，则称 Y 为 $T$ 的不变子空间，记为 $Y\in \mathrm{Inv}(T)$．如果对任意的 $Z\in \mathrm{Inv}(T)$，恒可从 $\sigma_e(T|Z)\subset\sigma_e(T|Y)$ 推得 $Z\subset Y$，则称 Y 为谱极大子空间，记为 $Y\in SM_e(T)$．若 $\Delta\subset C_\infty$，记 $X_T(\Delta)=\{x\in X,\ \sigma_e(x, T)\subset\Delta\}$，$X(T, \Delta)=\bigcup\{Y\in \mathrm{Inv}(T),\ \sigma_e(T|Y)\subset\Delta\}$．其余的记号与文献〔6〕一致．

设 $T\in C(X)$，S 是含于 $\sigma_e(T)$ 的闭集，$n\geq 1$ 为自然数，如果对 $\sigma_e(T)$ 的任一开复盖 $\{G_i\}_{i=0}^n$，其中 $G_0\supset S$，存在 $\{Y_i\}_{i=0}^n\in SM_e(T)$ 使得（i）$X=\sum_{i=0}^n Y_i$（ii）$\sigma_e(T|Y_i)\subset G_i$ $i=0, 1, \cdots, n$．则称 $T$ 是（$S$，$n$）可分解算子，若对任意 $n$ 都成立，则称 $T$ 为 S 可分解算子．B. Nagy 已证明（S，1）可分解等价于 S 可分解．我们已证明 $T$ 是 S 可分解与下列事实等价：对 $\sigma_e(T)$ 的任意开复盖 $\{G_0, G_1\}$，如果 $G_0>S$，则存在 $Y_0$，$Y_1\in SM_e(T)$，使得 $X=Y_0+Y_1$，且 $S\subset\sigma_e(T|Y_0)\subset\overline{G}_0$，$\sigma_e(T|Y_1)\subset\overline{G}_1$（〔7〕定理 7）．此外，若 $T$ 是 S 可分解算子，S 与 F 是含在 $\sigma_e(T)$ 中的两个闭集且 $S\subset F$，则 $X_T(F)=X(T, F)\in SM_e(T)$，且 $\sigma_e(T|X(T, F))\subset F$，如果 $F\cap S=\varnothing$，那么 $X(T, F)\in SM_e(T)$，$\sigma_e(T|X(T, F))\subset F$．（〔7〕定理 2）．我们还有以下结果：若 $T$ 是 S 可分解算子，$Y\in SM_e(T)$ 且 $\sigma_e(T|Y)\supset S$，则 $Y\in AI(T)$（$AI(T)$ 表示 $T$ 的解析不变子空间（〔7〕定理 9）．

**定理 1** 设 $T\in C(X)$ 是稠定的 S 可分解算子，其中 $S\subset\sigma_e(T)$，是闭集．设 $F\subset C_\infty$ 也是闭集且满足如下的条件（i）$F\cap S=\varnothing$ 或 $F\supset S$（ii）F 有界或 $F^c$ 有界，那么

$$\sigma_e(T^*|X(T, F^c)^\perp)\subset F \text{ 且 } X(T, F^c)^\perp=X^*(T^*, F)$$

**证** 我们分为若干部分来证．对第一个结论，将证明以下各点：

* 1984年3月5日收到．

$1^\circ$ $X(T, F^c)^\perp \in \mathrm{Inv}(T^*)$. 因$F^c$是开集，易知$X(T, F^c)$是线性流形，且当$x \in X(T, F^c) \cap D_T$时，$Tx \in X(T, F^c)$. 若$F^c$有界显然$X(T, F^c) \subset D_T$. 若$F^c$无界则由假设知F有界，这时可知$X(T, F^c) \cap D_T$在$X(T, F^c)$中稠. 若$x^* \in X(T, F^c)^\perp \cap D_{T^*}$，则对任意的$x \in X(T, F^c) \cap D_T$，有$\langle x, T^*x^* \rangle = \langle Tx, x^* \rangle = 0$，因而在整个$X(T, F^c)$上有$\langle x, T^*x^* \rangle = 0$，$T^*x^* \in X(T, F^c)^\perp$. 这就证明了$1^\circ$.

$2^\circ$ $\infty \notin \sigma_e(T^* | X(T, F^c)^\perp) \setminus F$.

若$\infty \in F$，这是显然的. 若$\infty \notin F$，则由假设知F有界. 现在只须证明$X(T, F^c)^\perp \subset D_{T^*}$即可. 令开集$G_1 \supset F$，$G_2 = F^c$，则$\{G_1, G_2\}$是$C_\infty$的开复盖. 这时$G_1 \supset S$和$G_2 \supset S$中至少有一成立. 因$T$是$S$可分解，必存在$Y_i$，使$X = \sum_{i=1}^{2} Y_i$，$\sigma_e(T | Y_i) \subset G_i$，而且$Y_1 \subset D_T$（F有界）$Y_2 \subset X(T, F^c)$. 由逆算子定理可知存在常数$M > 0$，使得对任意的$x \in X$，存在$y_1 \in Y_1$，$y_2 \in Y_2$，满足$x = y_1 + y_2$，$\|y_1\| + \|y_2\| \leq M\|x\|$. 设$y^* \in X(T, F^c)^\perp$. 对上述的$x$，$y_1$，$y_2$，如果$x \in D_T$，则由$Y_1 \subset D_T$，可知$y_2 \in X(T, F^c) \cap D_T$. 于是$|\langle Tx, y^* \rangle| = |\langle Ty_1, y^* \rangle| \leq \|y^*\| \cdot \|Ty\| \leq \|y^*\| \|T|Y_1\| \|y_1\| \leqq M^* \|y^*\| \|T|Y_1\|. \|x\|$. 故$y^* \in D_{T^*}$，因而$X(T, F^c)^\perp \subset D_{T^*}$，$2^\circ$证完.

$3^\circ$ 设$\lambda \neq \infty$，$\lambda \in F^c$. 则$\lambda - T^* | X(T, F^c)^\perp$是单射的.

任取$x^* \in X(T, F^c)^\perp \cap D_{T^*}$，且$(\lambda - T^*)x^* = 0$，现证$x^* = 0$. 再分两种情况. a) 若$F \cap S = \phi$. 则令$G_0 = F^c$，开集$G_1 \supset F$，$\overline{G_1} \cap S = \phi$，$\lambda \notin \overline{G_1}$. 于是有$Y_i \in SM_e(T)$，$X = \Sigma Y_i$，$\sigma_e(T | Y_i) \subset G_i$，对任意的$x \in X$，有$x = y_0 + y_1$，$y_i \in Y_i$，$i = 0, 1$. 因$y_0 \in Y_0 \subset X(T, F^c)$. 故$\langle y_0, x^* \rangle = 0$. 对$y_1$，由于$\lambda \notin G_1$而$\sigma_e(T | Y_1) \subset G$，故存在$y_1' \in Y_1 \cap D_T$，使得$y_1 = (\lambda - T)y_1'$. 于是$\langle y_1, x^* \rangle = \langle (\lambda - T)y_1', x^* \rangle = \langle y_1', (\lambda - T^*)x^* \rangle = \langle y_1', 0 \rangle = 0$ 故$x^* = 0$. b) 若$F \supset S$. 命$G_0$为$G_\infty$的开子集，$G_0 \supset F$，$\lambda \notin \overline{G_0}$，$G_1 = F^c$，则如a)同样可证得$x^* = 0$. $3^\circ$证完.

$4^\circ$ 若$F \cap S = \Phi$，$\lambda \neq \infty$，$\lambda \in F^c$则$\lambda - T^* | X(T, F^c)^\perp$是满射的.

这只须证对任意的$x \in X$，$y^* \in X(T, F^c)^\perp$，总存在$x^*$，使得$\langle x, y^* \rangle = \langle x, (\lambda - T^*)x^* \rangle$对$\forall x \in D_T$成立. 为此，仍令$G_0 = F^c$，$G_1$为包含F的开集，$\overline{G_1} \cap S = \phi$，$\lambda \notin G_1$，F有界时$G_1$也有界. 于是据前所引的代者的结果（〔7〕定理7）必存在$Y_i \in SM_e(T)$，使得$X = \sum_{i=0}^{1} Y_i$，$\sigma_e(T$ $\sigma_e(T | Y_i) \subset G_i$，$i = 0, 1$，而且还有$S \subset \sigma_e(T | Y_0)$. 这时$x = y_0 + y_1$，$y_i \in Y_i$，$i = 0, 1$. 这时我们应该设法证明在这样的$x^*$，使得$(\lambda - T^*)x^* = y^*$，于是应有

$$\langle x, y^* \rangle = \langle y_0 + y_1, y^* \rangle = \langle y_1, y^* \rangle = \langle y_1, (\lambda - T^*)x^* \rangle = \langle (\lambda - T)y_1, x^* \rangle = \langle (\lambda - T)x, x^* \rangle.$$

很自然地，我们就定义$x^*$如下：对任意的$x \in X$，$x = y_0 + y_1$，$y^* \in X(T, F^c)^\perp$，令$\langle x, x^* \rangle = \langle R(\lambda, T | Y_1)y_1, y^* \rangle$. 首先证明这样定义$x^*$与$y_1$的取法无关. 今设$x = y_0' + y_1'$，$y_i' \in Y_i$ $i = 0, 1$. 于是$y_0' - y_0 = y_1 - y_1' \in Y_0 \cap Y_1$. 由前引结果（〔7〕定理9），$Y_0 \in AI(T)$. 由于$\lambda \notin G_1$，故$\lambda \in \rho(T | Y_1)$。因此从$(\lambda - T)R(\lambda, T | Y_1)(y_1' - y_1) = y_1' - y_1 \in Y_0$

$\cap Y_1\subset Y_0$，可知，$R(\lambda, T|Y_1)(y_1'-y_1)\in Y_0$．但$Y_0\subset X(T, F^c)$，$y^*\in X(T, F^c)^{\perp}$故$\langle R(\lambda, T|Y_1)(y_1'-y_1), y^*\rangle=0$．这就证明了$x^*$定义是无歧义的．现在证明$x^*\in X^*$．这可由逆算子定理推得：$|\langle R(\lambda,T|Y_1)y_1, y^*\rangle|\le\|R(\lambda_1, T|Y_1)\|\|y_1\|\|y^*\|\le M\|^*\|\|R(\lambda, T|Y_1)\|\|x\|$（$M>0$．$\|y_1\|\le M\|x\|$）．再证$x^*\in D_{T^*}$．由于$Y_0$和$Y_1$至少有一个含于$D_T$内．所以若$x\in D_T$，则$y_0, y_1\in D_T$．因而：$|\langle Tx, x^*\rangle|=|\langle R(\lambda, T|Y_1)Ty_1, y^*\rangle|\le|\langle y_1, y^*\rangle|+|\langle\lambda R(\lambda, T|Y_1)y_1, y^*\rangle|\le\|y_1\|\cdot\|y^*\|+\|\lambda R(\lambda, T|Y_1)\|\|y_1\|\|y^*\|\le K\|x\|$（仍据逆算子定理）．

以下证$x^*\in X(T, F^c)^{\perp}$．对$x\in X(T, F^c)$，仍可如上分解为$x=y_0+y_1$．因$Y_0\subset X(T, F^c)$，且$X(T, F^c)$是线性流形，故$y_1$也在$X(T, F^c)$中．又因$F^c\supset S$，故由前引结果（[7]定理2）知$X(T, F^c)=X_T(F^c)$．故存在开集$\Delta$：$F^c\subset\Delta\subset S^c$及解析函数$f$：$\Delta\to D_T$，使得$\mu\in\Delta\setminus\{\infty\}$时$(\mu-T)f(\mu)=y_1\in Y_1$．当$\mu\in\Delta\cap\sigma(T|Y_1)$时，由$Y_1$的$T$吸收性立即有$f(\lambda)\in Y_1$．当$\mu\in\Delta\cap\rho(T|Y_1)\setminus\{\infty\}$时，令$g(\mu)=R(\mu, T|Y_1)y_1$，则$(\mu-T)g(\mu)=y_1=(\mu-T)f(\mu)$．但$T$在$\Delta$上有SVEP，故$f(\mu)=g(\mu)\in Y_1$．这样一来，$(\mu-T)R(\lambda, T|Y_1)f(\mu)=R(\lambda, T|Y_1)y_1$，即$\sigma_e(R(\lambda, T|Y_1)y_1, T)\subset\Delta^c\subset F^c$，$R(\lambda, T|Y_1)y_1\in X_T(F^c)=X(T, F^c)$．因此$\langle x, x^*\rangle=\langle R(\lambda, T|Y_1)y_1, y^*\rangle=0$．到此为止，我们已经完成了4°的证明．

5° 若$F\supset S$，$\lambda\ne\infty$，$\lambda\in F^c$．则$\lambda-T^*|X(T, F^c)^{\perp}$也是满射的．

取开集$G_0\subset C_\infty$，使得$G_0\supset F$，且$\lambda\notin\overline{G}_0$．再命$G_1=F^c$．仍如4°一样可考察$\langle R(\lambda, T|Y_0)y_0, y^*\rangle$（只将$Y_1$，$y_1$分别换为$Y_0$，$y_0$）．先证这一泛函的定义无歧义．设$x=y_0+y_1=y_0'+y_1'$，则$y_0'-y_0=y_1-y_1'\in Y_0\cap Y_1$．因$\lambda\notin\overline{G}_0$，取$\lambda$的邻域D使$D\cap\overline{G}_0=\phi$，$D\subset\overline{G}_0^c\subset\rho(T|Y_0)$，故$\mu\in D$时，$R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)\in Y_0$，且$(\mu-T)R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)=y_0'-y_0\in Y_0\cap Y_1$．这时若$\mu\in\sigma(T|Y_1)$则由$Y_1$的$T$吸收性知$R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)\in Y_1$．若$\mu\in D\cap\rho(T|Y_0)$，命$h(\mu)=R(\mu, T|Y_1)(y_0'-y_0)$，则$(\mu-T)h(\mu)=y_0'-y_0=(\mu-T)R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)$．由于$T$在$D(\subset S^c)$有SVEP，故$R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)=h(\mu)\in Y_1$．于是当$\mu\in D$时，总有$R(\mu, T|Y_0)(y_0'-y_0)\in Y_0\cap Y_1\subset Y_1\subset X(T, F^c)$，故$\langle R(\lambda, T|Y_0)(y_0'-y_0), y^*\rangle=0$（对$y^*\in X(T, F^c)^{\perp}$）．

与4°一样可定义$x^*$：$\langle x, x^*\rangle=\langle R(\lambda, T|Y_0)y_0, y^*\rangle$，且同样可证$x^*\in D_{T^*}$，现证$x^*\in X(T, F^c)^{\perp}$，设$x\in X(T, F^c)$，必有$Y_x\in \mathrm{Inv}(T)$使得$x\in Y_x$且$\sigma_e(T|Y_x)\subset F^c\subset S^c$．命$Y=X(T, \sigma_e(T|Y_x)\cup\sigma_e(T|Y_1))$．但$\sigma_e(T|Y_x)\cup\sigma_e(T|Y_1)\subset F^c\subset S^c$，故$Y\in SM_e(T)$，$\sigma_e(T|Y)\subset F^c$且$x\in Y_x\subset Y$，$y_1\in Y_1\subset Y$．显然也有$y_0\in Y\subset X(T, F^c)$．但$y_0=(\lambda-T)R(\lambda, T|Y_0)y_0\in Y$．若$\lambda\in\sigma(T|Y)$，由于极大谱子空间Y是$T$吸收的，立知$R(\lambda, T|Y_0)y_0\in Y\subset X(T, F^c)$．若$\lambda\in\rho(T|Y)$，那末$\lambda\in\rho(T|Y)\cap\rho(T|Y_0)$．当$\mu\in\rho(T|Y)\cap\rho(T|Y_0)$时$(\mu-T)R(\mu, T|Y)y_0=(\mu-T)R(\mu, T|Y_0)y_0=y_0$．但$\rho(T|Y_0)\cap S=\phi$，故$T$在$\rho(T|Y_0)\cap\rho(T|Y)$上有SVEP．所以$R(\mu, T|Y_0)y_0=R(\mu, T|Y)y_0\in Y\subset x(T, F^c)$，又得$R(\lambda, T|Y_0)y_0\in X(T, F^c)$．这就证明了$x^*\in X(T, F^c)^{\perp}$．这样一来，5°亦证完．综合1°—5°，定理的第一个结论证毕．

现证定理的第二个结论，即证$X(T|F^c)^{\perp}=X^*(T^*, F)$．由（i），已知$\sigma_e(T^*|X(T, F^c)^{\perp})\subset F$，故$X(T, F^c)^{\perp}\subset X^*(T^*, F)$．现证反面．任取$x^*\in X^*(T^*, F)$，$x\in X(T, F^c)$，我们来证明$\langle x, x^*\rangle=0$．因$x^*\in X^*\in^*(T, F)$，故存在$Y^*\in \mathrm{Inv}(T^*)$，使得$x^*\in Y^*$且

$\sigma_e(T^*|Y^*)\subset$ F. 同理存在Y使得$x\in$ Y且$\sigma_e(T|Y)\subset F^c$. 易知$\rho(T^*|Y^*)$与$\rho(T|Y)$的交集非空，其并集复盖$C_\infty$. 命

$$f(\lambda)=\begin{cases}\langle R(\lambda, T|Y)x, x^*\rangle & 当\lambda\in\rho(T|Y)时,\\ \langle x, R(\lambda, T^*|Y^*)x^*\rangle & 当\lambda\in\rho(T^*|Y^*)时\end{cases}$$

当$\lambda\in\rho(T^*|Y^*)\cap\rho(T|Y)$时，$\langle R(\lambda, T|Y)x, x^*\rangle=\langle R(\lambda, T|Y)x, (\lambda-T^*)R(\lambda, T^*|Y^*)x^*\rangle=\langle(\lambda-T)R(\lambda, T|Y)x, R(\lambda, T^*|Y^*)x^*\rangle=\langle x, R(\lambda, T^*|Y^*)x^*\rangle$. 故定义合理. $f(\lambda)$在$C_\infty$上单值解析，$\infty$是$f$的零点，故$f(\lambda)\equiv 0$. 任取$\lambda_0\in\rho(T|Y)\cap\rho(T^*|Y^*)$，将有$(\lambda_0-T^*)x^*\in Y^*$，故$\lambda\in\rho(T^*|Y^*)$时，有$\langle x, R(\lambda, T^*|Y^*)(\lambda_0-T^*)x^*\rangle=0$，特别地当$\lambda=\lambda_0$时即得$\langle x, x^*\rangle=0$. 第二个结论证毕. 这就完成了定理1的证明.

现在我们来讨论$S$可分解算子的对偶定理. 若$T$是$S$可分解，则$T^*$必$S$可分解[3]. 但反过来尚未见研究. 王声望在〔1〕中给出了一个比较深刻的方法，得出了$T^*$可分解导致$T$可分解的条件. 这里，我们用定理1的结果，采取〔1〕的方法，得到$T^*$为$S$分解与$T$为$S$可分解之间的联系. 我们引用一些记号[1]. 设X为复Banach空间. 它的$n$次共轭空间记为$X^{n*}$，记$\tau$为X到$X^{2*}$中的自然嵌入，$\tau_1$为$X^*$到$X^{3*}$中的自然嵌入. 由〔1〕可知$X^{3*}=\tau_1X^*\oplus(\tau X)^{\perp}$. 记$P$为自$X^{3*}$沿$(\tau X)^{\perp}$方向到$\tau_1X^*$上的投影.

**定理2** 设$T\in C(X)$，$T^*$、$T^{2*}$、$T^{3*}$都存在. 设$T^*$是$S$可分解的，其中$S\subset\sigma_e(T^*)=\sigma_e(T)$是闭集. 设F也是闭集且满足如下条件：(i) F$\supset$S或F$\cap$S$=\varnothing$ (ii) F有界或$F^c$有界，那么$X^*(T^*, F)$按$\omega(X^*, X)$拓扑是闭的.

**证** 由〔3〕，$T^{2*}$、$T^{3*}$也是S可分解. 由定理1知：$X^{3*}(T^{3*}, F)=X^{2*}_{T*}(F^c)^{\perp}$，故按$\omega(X^{3*}, X^{2*})$闭. 由前引结果（〔7〕定理2），$X^{3*}(T^{3*}, F)\in SMe(T^{3*})$. $P$和$T^{3*}$可交换[1]. 故$X^{3*}(T^{3*}, F)\in Inv(P)$. 今若F$\supset$S，则$X^{3*}(T^{3*}, F)=X^{3*}_{T*}(F)$[7]. 于是$x^*\in X^*(T^*, F)\Leftrightarrow\sigma_e(x^*, T^*)\subset F\Leftrightarrow\sigma_e(\tau_1x^*, T^{3*})\subset F\Leftrightarrow\tau_1x^*\in X^{3*}_{T^{3*}}(F)\cap PX^{3*}=PX^{3*}_{T^{3*}}(F)=PX^{3*}(T^{3*}, F)$. 故$\tau_1X^*(T^*, F)=PX^{3*}(T^{3*}, F)$. 又若F$\cap$S$=\varnothing$，记$Y_1=X^*(T^*, F\cup S)$，$Z_1=X^*(T^*, F)$，$W_1=X^*(T^*, S)$，$Y_3=X^{3*}(T^{3*}, F\cup S)$，$Z_3=X^{3*}(T^{3*}, F)$，$W_3=X^{3*}(T^{3*}, S)$. 那末$Y_1=Z_1\oplus W_1$，$Y_3=Z_3\oplus W_3$，且$\tau_1Y_1=PY_3$，$\tau W_1=PW_3$. 显然$\tau_1Y_1=\tau_1Z_1\oplus\tau_1W_1$，因而有$PY_3=\tau_1Z_1\oplus PW_3$. 另一方面$Y_3$，$Z_3$，$W_3$均属于$Inv(P)$，故$PY_3=PZ_3\oplus PW_3$. 又$\tau_1T^*|_{Z_1}=T^{3*}\tau_1|_{Z_1}$，故$\sigma_e(T^{3*}|\tau_1Z_1)=\sigma_e(T^*|Z_1)\subset F$，因而$\tau_1Z_1\subset X^{3*}(T^{3*}, F)=Z_3$，故$\tau_1Z_1\subset PZ_3$. 由上面诸结果，可知$\tau_1Z_1=PZ_3$，即$\tau_1X^*(T^*, F)=PX^{3*}(T^{3*}, F)$. 这样由〔1〕引理1，不论F$\supset$S或F$\cap$S$=\varnothing$，均得$X^*(T^*, F)$按$\omega(x^*, x)$拓扑闭. 证完.

**定理3** 设$T\in C(X)$，$T$、$T^*$、$T^{2*}$均稠定，S是含于$\sigma_e(T)$中的闭集. 如果$T^*$是S可分解算子，那末$T$也是s可分解算子.

**证** 令开集$G_0\supset S$，$\overline{G}_1$与S不相交，且$\{G_0, G_1\}$是$\sigma_e(T)$的开复盖. 不妨设$G_0$，$G_1$中有一个有界，另一个为$\infty$的开邻域. 命$K_i=G_i^c$，于是$K_1$的内部$K_1^i\supset S$，$K_0\cap S=\varnothing$ $K_0\cap K_1\cap\sigma_e(T)=\varnothing$. 还不妨设$K_0^i\neq\varnothing$，$K_1^i\neq\varnothing$. 由于$T^*$是S可分解的，故$X^*(T^*, K_0\cup K_1)$，$X^*(T^*, K_0)$，$X^*(T^*, K_1)$都属于$SM_e(T^*)$[7]，并且$X^*(T^*, K_0\cup K_1)=X^*(T^*, K_0)\oplus X^*(T^*, K_1)$. 令$Y_i={}^{\perp}X^*(T^*, K_i)$虽然$Y_i\in Inv(T)$，由定理2，$X^*(T^*, K_i)$按$\omega(X^*,$

X）闭，故有$Y_i^{\perp}=X^*(T^*, K_i)$ $i=0, 1$．我们来验证$Y_0+Y_1$在X中稠，事实上，这可从$Y_0^{\perp}\cap Y_1^{\perp}=X^*(T^*, K_0)\cap X^*(T^*, K_1)=X^*(T^*, K_0\cap K_1\cap\sigma_e(T^*))=(0)$ 得出。另一方面，已证$X^*(T^*, K_0\cup K_1)=X^*(T^*, K_0)\oplus X^*(T^*, K_1)=Y_0^{\perp}+Y_1^{\perp}$，故$Y_0^{\perp}+Y_1^{\perp}$是闭的．由Kato定理[8]知$Y_0+Y_1$闭，因而$X=Y_0+Y_1$．

今设$G_1$有界，则$K_1=G_1^c$为$\infty$的邻域，$K^I\supset S$，由〔1〕的引理6，$Y_1\subset D_T$．现证$T|Y_0$稠定，设$x\in Y_0$，则有$x_n\in D_T$，$x_n\to x$．不妨设$\|x_{n+1}-x_n\|\leq\frac{1}{2^n}$．因$X=Y_0+Y_1$，故存在$M>0$．以及 $y_n^{(0)}\in Y_0$，$y_n^{(1)}\in Y_1$，$x_1^{(0)}\in Y_0$，$x_1^{(1)}\in Y_1$，使得$x_1=x_1^{(0)}+x_1^{(1)}$，$x_{n+1}-x_n=y_n^{(0)}+y_n^{(1)}$ 且$\|y_n^0\|+\|y_n^1\|\leq M\|x_{n+1}-x_n\|\leq M/2^n$．记$x^{(0)}=x_1^{(0)}+\Sigma y_n^{(0)}\in Y_0$，$x^{(1)}=x_1^{(1)}+\Sigma y_n^{(1)}\in Y_1\subset D_T$，$x=x^{(0)}+x^{(1)}$，故$x^{(1)}=x-x^{(0)}\in Y_0\cap D_T$．命$x_n'=x_1^{(0)}+x^{(1)}+\sum_{i=1}^{n}y_i^{(0)}$，则$x_n'\in Y_0\cap D_T$，$x_n'\to x$．因而$T|Y_0$稠定．以下证 $(T^*)^{X^*(T^*, K_0)}$、 $(T^*)^{X^*(T^*, K_0)}$是闭算子．已设$K_0^I\neq\varnothing$ $K_1^I\neq\varnothing$，取$H_0$使得$H_0\cup K_0^I\supset\sigma_e(T^*)=\sigma_e(T)$．若$K_0$为$\infty$邻域，取$H_0$为有界开集．若$K_0$有界，则取$H_0$为$\infty$邻域．由于$T^*$是$S$—可分解，故

$$X^*=X^*(T^*, \overline{H}_0)+X^*(T^*, K_0)$$

若$K_0$有界，则$X^*(T^*, K_0)\subset D_T$．然而我们有

$$\sigma_e(T^*|X^*(T^*, \overline{H}_0))\cup\sigma_e(T^*|X^*(T^*, K_0)\cap X^*(T^*, \overline{H}_0))\subset$$
$$\sigma_e(T^*|X^*(T^*, \overline{H}_0))\cup\sigma_e(T^*|X^*(T^*,K_0\cap\overline{H}_0))\subset\overline{H}_0\cup(K_0\cap\overline{H}_0)\subset\overline{H}_0.$$

故由〔1〕引理4知 $(T^*)^{X^*(T^*, K_0)}$是闭算子．当$H_0$有界时$X^*(T^*, \overline{H}_0)\subset D_{T^*}$，仍由〔1〕引理4知 $(T^*)^{X^*(T^*, K)}$闭且有界．

容易证明它们分别在$X^*/Y_0^{\perp}$和$X^*/Y_1^{\perp}$上稠定，这只要注意 $Y_i^{\perp}=X^*(T^*, K_i)$ $i=0, 1$，当$T$是闭算子，$Y\in \mathrm{Inv}(T)$ 且$T^Y$也是X/Y上闭算子时，由$T$稠定可知$T^Y$也稠定。现在如果能证明 $(T|Y_i)^*$与 $(T^*)^{Y_i^{\perp}}$ $(i=0, 1)$ 相似．则由〔7〕的定理11，可知$\sigma_e(T|Y_i)=\sigma_e((T|Y_i)^*)=\sigma_e((T^*)^{Y_i^{\perp}})=\sigma_e(T^*)\setminus\sigma_e(T^*|Y_i)\subset\sigma_e(T)\setminus(\overline{G}_i)^c\subset G_i$ $i=0, 1$，也就证明了定理3．

我们来证 $(T|Y_i^*)$ 与 $(T^*)^{Y_i^{\perp}}$相似．因$Y_i^*\cong X^*/Y_i^{\perp}$，对任何$x^*\in X^*$，$J_i[x^*]_{Y_i^{\perp}}=x^*|Y_i$是等距同构，$i=0, 1$，若 $[x^*]_{Y_i^{\perp}}$在 $(T^*)^{Y_i^{\perp}}$的定义域中，不妨设$x^*\in D_{T^*}$，那末对任何$y\in Y_i\cap D_T$，有$|\langle(T|Y_i)y, J_i[x^*]_{Y_i^{\perp}}\rangle|=|\langle(T|Y_i)y, x^*|Y_i\rangle|=|\langle Ty, x^*\rangle|=|\langle y, T^*x^*\rangle|\leq A\|y\|$．因此$J_i[x^*]_{Y_i^{\perp}}$在 $(T|Y_i)^*$的定义域内．这样一来，对任意的$y\in Y_i\cap D_T$，我们有

$$\langle y, (T|Y_i)^*J_i[x^*]_{Y_i^{\perp}}\rangle=\langle Ty, J_i[x^*]_{Y_i^{\perp}}\rangle=\langle Ty, x^*\rangle,$$
$$\langle y, J_i(T^*)^{Y_i^{\perp}}[x^*]_{Y_i^{\perp}}\rangle=\langle y, J_i[T^*x^*]_{Y_i^{\perp}}\rangle=\langle Ty, x^*\rangle.$$

因此 $(T|Y_i)^*J_i=J_i(T^*)^{Y_i^{\perp}}$，对一切 $[x^*]_{Y_i^{\perp}}\in D_{(T^*)^{Y_i^{\perp}}}$都成立．反之，可证对一切$x^*\in X^*$且有$x^*|Y_0\in D_{T(Y_0)}$者，必有$x^*\in D_{T^*}$，即 $[x^*]_{Y_0^{\perp}}\in D_{(T^*)^{Y_0^{\perp}}}$．事实上，对任意的$y_0\in Y_0\cap D_T$，有$|\langle Ty_0, x^*\rangle|\leq M\|y_0\|$（$M$为正常数）．再由逆算子定理，知有$y_i\in Y_i$使$x=y_0+y_1$，$\|y_0\|+\|y_1\|\leq M'\|x\|$（$M'$是正常数）．若$x\in D_T$，因$Y_1\subset D_T$故$y_0\in Y_0\cap D_T$．于是$|\langle Tx, x^*\rangle|\leq|\langle Ty_0, x^*\rangle|+|\langle Ty_1, x^*\rangle|\leq M\|y_0\|+\|T|Y_1\|\|y_1\|\|x^*\|\leq[M+\|T|Y_1\|\|x^*\|]M'\|x\|$ 这说明 $x\in D_{T^*}$． 因而证明了 $(T|Y_0)^*$与 $(T^*)^{Y_0^{\perp}}$相似．再证 $(T|Y_1)^*$与 $(T^*)^{Y_1^{\perp}}$相似．由于$Y_1\subset D_T$，故$T|Y_1$和 $(T|Y_1)^*$均有界．对任意 $[x^*]_{Y_1^{\perp}}\in D_{(T^*)^{Y_1^{\perp}}}$，有$\|(T^*)^{Y_1^{\perp}}[x^*]_{Y_1^{\perp}}=$

$\|(T|Y_1)^*J_1[x^*]_{Y_1^\perp}\| \leq \|T|Y_1\|\,\|[x^*]_{Y_1^\perp}\|$. 但 $(T^*)^{Y_1^\perp}$ 闭且在 $X^*/Y_1^\perp$ 上稠定，故 $(T^*)^{Y_1^\perp}$ 有界. 即 $D_{(T^*)^{Y_1^\perp}} = X^*/Y_1^\perp$，于是又证明了 $(T|Y_1)^*$ 与 $(T^*)^{Y_1^\perp}$ 相似. 定理3 于是证毕.

这样我们在一些假定下，得到了 $T^*$ 的 S 可解能蕴含 $T$ 为 S 可解. 至于反过来，$T$ 为 S 可分解Y的问题，F.—H. Vasilescn 在1971年已解决[3]. 不过〔3〕中所定义的 $T$ 的不变子空间Y必须包含在定义域 $D_T$ 内，而我们只要求 $T(Y \cap D_T) \subset Y$，Y不一定包含在 $D_T$ 内. 虽然作了这一变动，但上述结论仍正确，证明也不难，因而就省略了.

总之，我们已经完整地建立了 S 可分解算子的对偶理论.

## 参 考 文 献


〔1〕王声望、I. Erdelyi 闭算子的谱对偶定理（Ⅲ），中国科学，A辑，1985年第6期，525—529.

〔2〕F.—H Vasilescu, Residuslly decomposable operators in Banach spaces Tokoku. Math. J. 21 (1969), 509—552.

〔3〕F.—H. Vasilescu, On the residual decomposability in dual space, Rev. Roum. Math. pures et Appl., 16 (1971), 1573—1587.

〔4〕B. Nagy, A spectral residuum for each closed operator, Topics in mordern operator theory 1981.

〔5〕I. Bacaru, On the restrictions and quotions of S decomposable operators, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., 20 (1976).

〔6〕I. Erdelyi and R. lange, Spectral Decompositions on Banach Spaces, Springer—Verlag, 1977.

〔7〕王漱石、张奠宙，S—可分解算子的一些性质，华东师大学报（自然科学版）1984年第4期.

〔8〕T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer—verlay, 1980.


# A Duality Theorem for S-Residually Decomposable Operators


*Zhang Dian-Zhou*　　*Wang Sou-Shi*

(East China normal univesity)　(Huzhou Normal College)



### Abstract

In this paper, we prove the following:

Th. If $T$ is a closed operator on a Banach space $X$, $T$, $T^*$, $T^{**}$ are densely defined, $T^*$ is a S-residually decomposable operator, then $T$ also is S-residually decomposable.