1987年11月

数学研究与评论
第七卷 第四期

可列谱的仿正规算子是正规算子*

邱朝欣

（福建师范大学）

本文中，总设**H**是复平面**C**上的Hilbert空间，$\mathscr{L}(\mathbf{H})$是**H**上的线性有界算子全体．设$T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$，称$T$为仿正规算子．若对所有$x\in\mathbf{H}$，$\|Tx\|^2\leq\|T^2x\|\,\|x\|$．易知半亚正规算子(因而亚正规算子)是仿正规算子．仿正规算子的正规性条件是一个引人注意的问题．1972年，T.Saito在其专著[1]中提出了一个问题：多项式紧的仿正规算子是否正规算子？1982年，文[2]指出多项式紧的仿正规算子必是正规算子的紧摄动．本文中，我们利用超穷论法([3])证明了谱为可列(这里可列均指有限或可列无穷)集的仿正规算子必是正规算子(**定理6**)．作为一个简单的推论(系7)，我们已肯定地回答了T.Saito的上述问题．值得注意的是，对于半亚正规算子来说，我们定理6的结论是半亚正规算子的Putnam不等式(见[4])的一个简单推论；但是，对于仿正规算子说，这结果还是新的．

作为预备知识，我们首先讨论**C**的可列紧集

定义1 设$\mathrm{E}\subset\mathbf{C}$，$\alpha$是一个序数．置

$$\mathrm{E}^{(0)}=\mathrm{E},\quad \mathrm{E}^{(1)}=(\mathrm{E}^{(0)})'=\mathrm{E}',\ \cdots$$

$$\mathrm{E}^{(\alpha)}=\begin{cases}(\mathrm{E}^{(\alpha-1)})', & \text{当}\alpha\text{非极限数时},\\ \bigcap_{\beta<\alpha}\mathrm{E}^{(\beta)}, & \text{当}\alpha\text{是极限数时}.\end{cases}$$

我们称$\mathrm{E}^{(\alpha)}$中的点为E的α阶聚点．

由超限归纳法，容易证明

命题2 设E是**C**中非空可列紧集．

(1)．对每个序数α，$\mathrm{E}^{(\alpha)}$是可列紧集．

(2)．设α,β是两个序数，$\alpha\leq\beta$，则$\mathrm{E}^{(\alpha)}\supseteq\mathrm{E}^{(\beta)}$．

(3)．设α,β是两个序数，$\alpha<\beta$，且$\mathrm{E}^{(\alpha)}\neq\varnothing$，则$\mathrm{E}^{(\alpha)}\supsetneqq\mathrm{E}^{(\beta)}$．

(4)．存在一个可列序数α，使得$\mathrm{E}^{(\alpha)}\neq\varnothing$但$\mathrm{E}^{(\alpha+1)}=\varnothing$．记之为$\alpha(\mathrm{E})$，称为E的阶数．

(5)．对每个$\lambda\in\mathrm{E}$，存在一个可列序数α使得$\lambda\in\mathrm{E}^{(\alpha)}\setminus\mathrm{E}^{(\alpha+1)}$．记之为$\alpha(\lambda,\mathrm{E})$或简记为$\alpha(\lambda)$．

设$T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$．以Ker$T$表$T$的核，$\sigma(T)$表$T$的谱．$r(T)$为$T$的谱半径，Lat$T$为$T$的不变子空间全体．若$\mathrm{M}\in\mathrm{Lat}T$，以$T|_{\mathrm{M}}$表$T$在M上的限制．若$\sigma$是$\sigma(T)$的开闭子集，以$\mathbf{H}(\sigma,T)$表$T$关于$\sigma$的Riesz射影空间，也简写成$\mathbf{H}(\sigma)$．另外，我们以$\dotplus$表示代数直和，以$\oplus$表示正交直和．

在本文主要定理的证明中，我们将多次使用下面的命题，其中，结论(1)是众所周知的，结论(2)～(5)都易于直接验证．

命题3 设$T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$．

*1985年5月1日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(1). 若 $|\lambda| = \|T\|$，则或 $\operatorname{Ker}(T-\lambda)=0$ 或 $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ 约化 T。

(2). 设 T 是仿正规算子，则 T 是正规型的，即 $r(T)=\|T\|$。

(3). 设 M 是仿正规算子 T 的不变子空间，则 $T|_M$ 是仿正规算子。

(4). 设 T 是可逆仿正规算子，则 T^{-1} 也是仿正规的。

(5). 设 T 是仿正规算子，$\sigma(T)=\{\mu\}$，则 $T=\mu I$。

现在，我们可以着手证明我们的主要定理．首先，给出如下的引理。

引理 4 设 $T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$，$H_i\in\operatorname{Lat}T_{(i=1,2,3)}$，使得 $\mathbf{H}=H_1\dot{+}H_2\dot{+}H_3$，$H_1\dot{+}H_2$、$H_2\dot{+}H_3\in\operatorname{Lat}T$；另外，$H_2$ 是 $T|(H_1\dot{+}H_2)$、$T|(H_2\dot{+}H_3)$ 的约化子空间．则 H_2 是 T 的约化子空间。

证明 只要注意到

$$\mathbf{H}\ominus H_2=\{[(H_1\dot{+}H_2)\ominus H_2]+[(H_2\dot{+}H_3)\ominus H_2]\}$$

易知本引理成立．

引理 5 设 $T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$ 是仿正规算子，其谱 $\sigma(T)$ 是可列集，$\alpha(\sigma(T))=\alpha$。又设 A 是 $\sigma(T)$ 的一个子集，关于 $\sigma(T)$ 为开集，$A\cap\sigma(T)^{(\alpha)}=\varnothing$，且对所有 $\lambda\in A$，$\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ 约化 T。现在取

$$\mathbf{H}_A=\sum_{\lambda\in A}\oplus\operatorname{Ker}(T-\lambda),$$

则 $\mathbf{H}_A$ 约化 T，$\sigma(T|\mathbf{H}_A^{\perp})\cap A=\varnothing$。

证明 我们来证明这样一个命题：

$$\begin{gathered}\text{设}\tau\text{是一个序数，}1\leqslant\tau\leqslant\alpha\text{，若记}\\ \mathbf{H}_\tau=\sum_{\lambda\in A\setminus E^{(\tau)}}\oplus\operatorname{Ker}(T-\lambda),\\ \text{则}\sigma(T|_{\mathbf{H}_\tau^{\perp}})\cap(A\setminus E^{(\tau)})=\varnothing\end{gathered}\qquad(*)$$

我们用超限归纳法证之．当 $\tau=1$ 时，$A\setminus E^{(1)}$ 中的点都是 E 的孤立点．因此，由 Riesz 谱分解定理以及命题 3 之(5) 易证命题(*) 为真．现在，设当 $\tau<\beta(\beta\leqslant\alpha)$ 时，命题(*) 均为真，下面，我们证明它在 $\tau=\beta$ 时亦真．事实上：

对于任意的 $\lambda\in A\setminus E^{(\beta)}$，若 $\alpha(\lambda)+1<\beta$，则由于

$$\sigma(T|_{\mathbf{H}^{\perp}_{(\alpha(\lambda)+1)}})\cap(A\setminus E^{(\alpha(\lambda)+1)})=\varnothing,\quad \mathbf{H}^{\perp}_{(\alpha(\lambda)+1)}\supseteq\mathbf{H}^{\perp}_{\beta}$$

$$\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})\subseteq\sigma(T|_{\mathbf{H}^{\perp}_{\alpha(\lambda)+1}})\ (\sigma(T)\text{不分割平面})\ ,\ \text{所以}$$

所以，$\lambda\notin\sigma(T/_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})$。

现在，当 β 是极限数时，上一段论证已表明：$\forall\lambda\in A\setminus E^{(\beta)}$，由于 $\alpha(\lambda)+1<\beta$，所以 $\lambda\notin\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta})$．因此，$\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})\cap(A\setminus E^{(\beta)})=\varnothing$.

当 β 非极限数时，由前面的论证知

$$\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})\cap(A\setminus E^{(\beta-1)})=\varnothing。$$

现在，对 $\forall\lambda\in A\cap(E^{(\beta-1)}\setminus E^{(\beta)})$，若 $\lambda\in\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})$ 则由 A 是 $\sigma(T)$ 的开子集知 λ 是 $\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta})$ 的孤立点；从而由命题 3 知 λ 是 $T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}}$ 的特征值，这与 $\mathbf{H}_\beta$ 的构造矛盾．故也有 $\sigma(T|_{\mathbf{H}_\beta^{\perp}})\cap(A\setminus E^{(\beta)})=\varnothing$.

总之，我们的命题(*)对 β 也成立，因此，由超限归纳法原理知：命题(*) 成立．现在，取 $\tau=\alpha$，则命题(*) 成为我们的引理的结论，故本引理为真．证毕．

现在我们有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理6　谱为可列集的仿正规算子是对角正规算子.

证明　我们对算子谱的阶数用超限归纳法.

首先，若$T\in\mathscr{L}(\mathbf{H})$是仿正规算子，$\alpha(\sigma(T))=0$，则$\sigma(T)$有限，由命题3知$T$是对角正规算子. 现在，设下述论断为真：若$T$是仿正规算子，$\alpha(\sigma(T))<\alpha$，则$T$是对角正规算子. 我们依次证明：

（1）　若T是仿正规算子，$\sigma(T)^{(\alpha)}=\{\mu\}$，则对于任意$\lambda\in\sigma(T)$：$|\lambda|\geqslant|\mu|$，$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T$.

事实上，当$\lambda\in\sigma(T)$：$|\lambda|>|\mu|$时，作以μ为心、半径适当的圆周Γ_μ，其内部为U_μ，外部为V_μ，使得

$$\begin{cases}\sigma(T)=(\sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu)\,\dot{\cup}\,(\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu),\\ \sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu、\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu\text{都是}\sigma(T)\text{的开闭子集},\\ \mu\in\sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu,\ \lambda\in\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu.\end{cases}$$

由归纳假设，$T|_{\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu)}$是对角正规算子，因而$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T|_{\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu)}$. 现在，考虑$\mathbf{H}$的子流形

$$\mathrm{Ker}(T-\lambda)\dotplus\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu)=\mathbf{H}_\lambda.$$

由于$\mathrm{Ker}(T-\lambda)\subseteq\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu)$，而

$$\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{V}_\mu)\dotplus\mathbf{H}(\sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu)=\mathbf{H},$$

所以，$\mathbf{H}_\lambda$也是$\mathbf{H}$的一个闭子空间. 容易验证$\sigma(T|_{\mathbf{H}_\lambda})\subseteq(\sigma(T)\cap\mathrm{U}_\mu)\cup\{\lambda\}$.所以由T是仿正规算子和命题3知$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T|_{\mathbf{H}_\lambda}$. 现在，由引理4即知$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T$.

进一步，对$\lambda\in\sigma(T)$：$|\lambda|=|\mu|$，作

$$\mathbf{H}_1=\sum_{|\eta|>|\mu|}\oplus\mathrm{Ker}(T-\eta).$$

显然，由引理5知$\mathbf{H}_1$约化T且

$$\sigma(T|_{\mathbf{H}_1^\perp})\subseteq\{\eta\in\sigma(T)\ \big|\ |\eta|\leqslant|\mu|\}.$$

由命题3知$\mathrm{Ker}(T-\lambda)=\mathrm{Ker}(T|_{\mathbf{H}_1^\perp}-\lambda)$约化$T|_{\mathbf{H}_1^\perp}$，从而约化$T$. 综上所述，论断(1)成立.

（2）　若T是仿正规算子，$\sigma(T)^{(\alpha)}=\{\mu\}$，$\min\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|=|\mu|$，则$T$是对角正规算子.

由论断(1)知，对所有$\lambda\in\sigma(T)\setminus\{\mu\}$，$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T$. 现在，取

$$\mathbf{H}_1=\sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{\mu\}}\oplus\mathrm{Ker}(T-\lambda),$$

由引理5知$\sigma(T|_{\mathbf{H}_1^\perp})\subseteq\{\mu\}$.因此，$T|_{\mathbf{H}_1^\perp}=\mu I|_{\mathbf{H}_1^\perp}$.

故T是对角正规算子. 论断(2)成立.

（3）　若T是一个可逆的仿正规算子，使$\sigma(T)^{(\alpha)}=\{\mu\}$，则$T$是对角正规算子.

事实上，由论断(1)知：$\forall\lambda\in\sigma(T)$：$|\lambda|>|\mu|$，$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T$. 现在，取

$$\mathbf{H}_1=\sum_{|\lambda|>|\mu|}\oplus\mathrm{Ker}(T-\lambda),$$

由引理5知$\sigma(T|_{\mathbf{H}_1^\perp})\subseteq\{\lambda\in\sigma(T)\ \big|\ |\lambda|\leqslant|\mu|\}$. 由谱映射定理，$\sigma((T|_{\mathbf{H}_1^\perp})^{-1})$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\in\sigma(T)$，$\lambda\neq\mu$．由论断（2）知，$(T|_{H})^{-1}$是对角正规算子，所以$T|_{H}$也是对角正规算子．因此T是对角正规算子．论断（3）成立．

（4） 若T是仿正规算子，$\sigma(T)^{(a)}=\{\mu\}$，则T是对角正规算子．

事实上，若T可逆，由论断（3）知之．若T不可逆而$\mu=0$，由论断（2）知之．若T不可逆而$\mu\neq0$，我们可以这样论证：

对于$\forall\lambda\in\sigma(T)\setminus\{\mu,0\}$，作以原点为心、半径适当的圆周$\Gamma_\mu$，设其内部为$U_\mu$，外部为$V_\mu$，使得

$$\sigma(T)=(\sigma(T)\cap U_\mu)\cup(\sigma(T)\cap V_\mu),$$

$\sigma(T)\cap U_\mu$，$\sigma(T)\cap V_\mu$都是$\sigma(T)$的开闭子集，

$\{\mu,\lambda\}\subseteq\sigma(T)\cap V_\mu$．

由论断（3）知 $T|_{H(\sigma(T)\cap V_\mu)}$ 是对角正规算子．另外，对于T的不变子空间

$$H_\lambda=\mathrm{Ker}(T-\lambda)\dotplus H(\sigma(T)\cap U_\mu),$$

$\sigma(T|_{H_\lambda})=\{\lambda\}\cup(\sigma(T)\cap U_\mu)$，所以由归纳假设知$T|_{H_\lambda}$也是对角正规算子．由引理4知$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$约化$T$．现在，取

$$H_1=\sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{\mu,0\}}\oplus\mathrm{Ker}(T-\lambda),$$

由引理5知$\sigma(T|_{H_1^\perp})\subseteq\{0,\mu\}$．由归纳假设知$T|_{H_1^\perp}$也是对角正规算子．因此，$T$是对角正规算子．论断（4）成立．

（5） 最后，我们可得：若T是仿正规算子，$a(\sigma(T))=a$，则T是对角正规算子．

事实上，由于$a(\sigma(T))=a$，所以$\sigma(T)^{(a)}$是有限集，不妨设$\sigma(T)^{(a)}=\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}$．把$\sigma(T)$分成$n$个不交的开闭子集$U_1,\cdots,U_n$，使得$\sigma(T)=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$且$\mu_i\in U_i$（$i=1,2,\cdots,n$）．由论断（4）知$T|_{H(U_i)}$（$i=1,2,\cdots,n$）都是对角正规算子．

对任意两个不同的U_i、U_j（$1\leq i,j\leq n$），设$\lambda\in U_i$，考虑T的不变子空间

$$H_\lambda=\mathrm{Ker}(T-\lambda)\dotplus H(U_j),$$

由于$\sigma(T|_{H_\lambda})\subseteq\{\lambda\}\cup U_j$，由论断（4）知$T/H_\lambda$是对角正规算子．所以$\mathrm{Ker}(T-\lambda)\perp H(U_j)$．由$\lambda$的任意性，我们已经证明了$H(U_i)\perp H(U_j)$．由此知$\{H(U_i)\}_{i=1}^{n}$两两互相正交．故$T$是对角正规算子．

至此，归纳步骤已完成．由超限归纳法原理知：求证的命题为真．证毕．

系7 设T是多项式紧的仿正规算子，则T是对角正规算子．

致谢：本文承林辰教授指导，谨表谢忱．

参考文献

［1］ T.Saito, Hyponormal Operators and Related Topics, New York, Springer-Verlag, 247, 534-664, 1972.

［2］ Shanti Prasanna, Weyl's theorem and thin spectra, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 91(1982), 1, 59-63.

［3］ 谢邦杰，超穷数与超穷论法，吉林人民出版社，1979．

［4］ 夏道行，线性算子谱理论Ⅰ，亚正常算子与半亚正常算子，纯粹数学与应用数学专著，第13号，科学出版社，1983．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.