1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

泛函微分方程中的广义拉什密辛型定理*

温立志

（华南师范大学）

1．引　言

设R^n为实的n维线性向量空间，$C=C([-r,0],R^n)$表示映照区间$[-r,0]$到R^n的连续函数所成的巴拿哈空间，其中$r\geqslant 0$．对$\varphi\in C$，取范数$|\varphi|=\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|$．记$C_H=\{\varphi:\varphi\in C,\ |\varphi|\leqslant H\}$．若$\sigma\in R$，$A>0$，$x\in C([\sigma-r,\sigma+A],R^n)$，则当$t\in[\sigma,\sigma+A]$时，$x_t$是由$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$所定义，故$x_t\in C$．

现考虑滞后型的泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

其中$\dot{x}(t)$表示x在t处的右导数，$f(t,\varphi)$为定义在$[0,\infty)\times C$上取值于R^n中的连续泛函，$f(t,0)\equiv 0$。

$x(\sigma,\psi)$表示方程（1）当初始时刻为σ，初始函数为ψ时的解，$x(t;\sigma,\psi)$表示$x(\sigma,\psi)$在时刻t的值．

设$V(t,\psi)$为定义在$[0,\infty)\times C$上取值于R中的连续泛函，V沿方程（1）的解的右上导数定义为：

$$\dot{V}(t,\varphi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\{V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)\}/h.$$

设u、v、w为定义在$[0,\infty)$上取值于$[0,\infty)$中的连续非减函数，当$s>0$时$u(s)>0$，$v(s)>0$，$w(s)>0$而$u(0)=v(0)=0$．

在使用李雅普诺夫泛函来判别方程（1）的一致稳定性及一致渐近稳定性时，下列的定理A及定理B是十分重要的经典结果（见文[1]定理2.1）：

定理A　若存在上述的函数满足下列的条件：对一切$t\geqslant 0$及$\varphi\in C$，有

(i)　$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$．

(ii)　$\dot{V}(t,\varphi)\leqslant 0$

则方程（1）的零解为一致稳定

定理B　若存在上述的函数满足下列的条件：对一切$t\geqslant 0$及$\varphi\in C$，有

(i)　$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$

(ii)　$\dot{V}(t,\varphi)\leqslant -w(|\varphi(0)|)$

(iii)　f将$R\times$（C中的有界集）映射入R^n中的有界集，

*1984年2月7日收到．

则方程（1）的零解为一致渐近稳定.

本文的主要目的是把定理A的条件（ii）及定理B的条件（ii）和（iii）加以改进，使得在较弱的条件下得到同样的结果，从而使得有些方程的稳定性用过去的方法不能判别时，用本文的方法可能得到解决.

2. 一致稳定性的判别定理

设$G(t,s)$为$[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$的连续函数，$G(t,0)\equiv 0$. 又设方程

$$\dot{y}(t)=G(t,y(t)) \tag{2}$$

的零解为一致稳定（或稳定）.

定理1 若存在上述的函数满足下列的条件：

(i) 对任何的$t\geq 0$及$\varphi\in C$，有

$$u(|\varphi(0)|)\leq V(t,\varphi)\leq v(|\varphi|).$$

(ii) 对任何的$\sigma\geq 0$及$\psi\in C$，存在$r_0\in(0,r]$及$\lambda>1$，使得当$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$且$V(t,x_t(\sigma,\psi))<\lambda v(|\psi|)$以及当$t\geq\sigma+r_0$且$V(t,x_t(\sigma,\psi))\geq V(\xi,x_\xi(\sigma,\psi))$，$\sigma\leq\xi\leq t$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq G(t,V(t,x_t(\sigma,\psi)))$，

则方程（1）的零解为一致稳定（或稳定）.

证 记方程（2）过(σ,y_0)的最大右行解为$y(t)$. 又将$x_t(\sigma,\psi)$简记为x_t. 现取$\delta>0$满足$\lambda v(\delta)<y_0$，(这里取$y_0>0$)，下面证明，当$|\psi|<\delta$时，有

$$V(t,x_t)\leq y(t),\quad t\geq\sigma \tag{3}$$

由于$V(\sigma,\psi)\leq v(\delta)<y_0$，再根据条件（ii），即知当$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$时有

$$V(t,x_t)<y(t)\text{而且}V(\sigma+r_0,x_{\sigma+r_0})<y(\sigma+r_0).$$

因此，若（3）不成立，则必存在$T>\sigma+r_0$使得$V(T,x_T)=y(T)$并且满足（a）$V(T,x_T)\geq V(t,x_t)$，$\sigma\leq t\leq T$，（b）$\dot{V}(T,x_T)>\dot{y}(T)$.

由（a）及条件（ii）知

$$\dot{V}(T,x_T)\leq G(T,V(T,x_T)).$$

这与（b）矛盾. 故（3）成立.

根据方程（2）的零解的一致稳定性，对任一$\varepsilon>0$，存在$\bar{\delta}>0$，使得当$y_0<\bar{\delta}$时，有$y(t)<u(\varepsilon)$，$(t\geq\sigma)$. 从而当$|\psi|<\delta$时，便有$V(t,x_t)<u(\varepsilon)$，$(t\geq\sigma)$. 故当$|\psi|<\delta$时有$|x(t)|<\varepsilon$对一切$t\geq\sigma$成立.

下面我们对定理1给出较为具体的表达.

设函数$h(t)$，$H(V)$均为$[0,\infty)\to[0,\infty)$的连续函数，当$V>0$时$H(V)>0$，$H(0)=0$，并且满足

$$\int^{\infty}h(t)\,dt<\infty,\ \int_0^a\frac{dV}{H(V)}=\infty,\ (a>0).$$

不难证明，方程$\dot{y}(t)=h(t)H(y(t))$的零解为一致稳定. 故由定理1即可得到下面的结果：

定理2 若存在上述的函数满足下列的条件：

(i) 对任何$t\geq 0$及$\varphi\in C$，有$u(|\varphi(0)|)\leq V(t,\varphi)\leq v(|\varphi|)$.

(ii) 对任何$\sigma\geq 0$及$\psi\in C$，存在$r_0\in(0,r]$及$\lambda>1$，使得当$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$且$V(t,$

$x_t(\sigma,\psi))\geq\lambda v(|\varphi|)$ 以及当$t\geq\sigma+r_0$且$V(t,x_t(\sigma,\psi))\geq V(\xi,x_\xi(\sigma,\psi))$，$\sigma\leq\xi\leq t$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq h(t)H(V(t,x_t(\sigma,\psi)))$.
则方程（1）的零解为一致稳定.

例1　考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=-ax^3(t)+bx^3(t-1)-\frac{g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}x^4\Big(t-\frac{1}{2}\Big)+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\Big(t-\frac{1}{2}+\theta\Big)\mathrm{d}\theta\Big] \tag{4}$$

其中$a>b>0$，$g(x)$连续，$g(0)=0$，$xg(x)>0$ ($x\neq 0$)，$xg(x)<M$，$M>0$.

现取$V(\varphi)=\frac{1}{4}\varphi^4(0)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}\varphi^6(\theta)\mathrm{d}\theta$, $u(s)=\frac{s^4}{4}$，$v(s)=\frac{s^4}{4}+\frac{as^6}{2}$，$h(t)=\frac{1}{1+t^2}$，$H(V)=MV$，$r_0=\frac{1}{2}$，$\lambda=2$，则通过计算可知定理2的条件皆被满足，故（4）的零解为一致稳定.

如果用定理A或文〔1〕的定理1.1来判别（4）的一致稳定性，无疑是很困难的.

3．一致渐近稳定的判别定理

定义　设$f(t,\varphi)$为定义在$[0,\infty)\times C_H$上取值于R^n中的连续泛函，如果$\varphi(0)^T f(t,\varphi)$在$[0,\infty)\times C_H$上有上界（或有下界），则称$f(t,\varphi)$为第一类半有界（或第二类半有界），如果$f(t,\varphi)$是第一类或第二类半有界，则称$f(t,\varphi)$为半有界.

显然，若$f(t,\varphi)$在$[0,\infty)\times C_H$上有界，则它必是半有界．反之则不然.

设泛函$P(t,\varphi)$在$[0,\infty)\times C_H$上连续正值，并且对给定的$V(t,\varphi)$满足下列的条件：对任何$b>a>0$，有

$$\inf_{a\leq V(t,\varphi)\leq b}[P(t,\varphi)-V(t,\varphi)]>0.$$

定理3　设存在上述的函数满足下列的条件：

(i)　对任何$t\geq 0$及$\varphi\in C_H$，有$u(|\varphi(0)|)\leq V(t,\varphi)\leq v(|\varphi|)$,

(ii)　对任何$\sigma\geq 0$和$\psi\in C_H$，存在$r_0\in(0,r]$及$\lambda>1$，使得当$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$且$V(t,x_t(\sigma,\psi))\geq\lambda v(|\psi|)$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq 0$；当$t\geq\sigma+r_0$且$P(t,x_t(\sigma,\psi))>V(\xi,x_\xi(\sigma,\psi))$，$t-r_0\leq\xi\leq t$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq -w(|x(t;\sigma,\psi)|)$,

(iii)　$f(t,\varphi)$为半有界.

则方程（1）的零解为一致渐近稳定（证明见定理1）.

例2　设纯量方程为$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)+b(t)x(t-r)$ (5)

其中$a(t)$和$b(t)$为连续函数，$0<\delta\leq a(t)<\infty$，$|b(t)|\leq M$，$M>0$．由于$f(t,\varphi)=-a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$在$[0,\infty)\times C_H$上无界，故定理B不能判别（5）的稳定性，但$f(t,\varphi)$是半有界的．取$V(t,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\varphi^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，则当$M<\delta$时便可满足定理3的条件，故方程（5）的零解是一致渐近稳定的.

例3　设纯量方程为

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)+b(t)x(t-r)+x^3(t)\Big[\frac{1}{4}x^2\big(t-\frac{r}{4}\big)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\big(t-\frac{r}{4}+\theta\big)\mathrm{d}\theta$$

$$+\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)\mathrm{d}\theta-g\Big(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Big)^k\Big] \quad (6)$$

其中$a(t)$、$b(t)$、$\alpha(t)$为连续函数，对所有的$t\in R$，有$0<\delta\leq a(t)<\infty$，$|b(t)|\leq M<\delta$，$M>0$，$\frac{r}{4}\leq\alpha(t)\leq\frac{r}{2}$，$g(s)$为连续有界函数，当$s>0$时$g(s)>s$，$g(0)=0$，$k$为奇数．

用过去的方法要判别（6）的稳定性是不太可能的，但用定理3可判别（6）的零解为一致渐近稳定，由于计算过程较长，在此不叙述了．

下面我们将定理3再进行推广，使之具有更广泛的形式．

设$F(t,s)$是定义在$[0,\infty)\times[0,\infty)$上取值于$[0,\infty)$中的连续函数，关于$s$是非减的，当$s>0$时$F(t,s)>0$，对给定的$a>0$，设$M(a)=\max\{\sup\limits_{\substack{t\geq 0\\|\varphi(0)|\leq H}}\varphi(0)^Tf(t,\varphi),\frac{a^2}{r}\}$，

$-m(a)=\min\{\inf\limits_{\substack{t\geq 0\\|\varphi(0)|\leq H}}\varphi(0)^Tf(t,\varphi),\quad -\frac{a^2}{r}\}$．

定理4 若存在上述的函数满足下列的条件：

(i) 对任何的$t\geq 0$及$\varphi\in C_H$，有$u(|\varphi(0)|)\leq V(t,\varphi)\leq v(|\varphi|)$，

(ii) 对任何的$\sigma\geq 0$及$\psi\in C_H$，存在$r_0\in[0,r]$及$\lambda\geq 1$，使得当$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$且$V(t,x_t(\sigma,\psi))\geq\lambda v(|\psi|)$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq 0$；当$t\geq\sigma+r_0$且$P(t,x_t(\sigma,\psi))>V(\xi,x_\xi(\sigma,\psi))$，$t-r\leq\xi\leq t$时，有$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\psi))\leq -F(t,|x(t;\sigma,\psi)|)$．

(iii) 对$a>0$，存在正整数k，使得对任何$\bar{t}\geq 0$及任何$t_i\in[\bar{t}+(2i-1)r,\bar{t}+2ir]$，$i=1,2,\cdots$，有下列两种情形之一成立：

(a) 当$f(t,\varphi)$为第一类半有界时，$\sum\limits_{i=1}^{k}\int_{t_i-\frac{a^2}{2M(a)}}^{t_i}F(t,a)\mathrm{d}t\geq v(H)$，

(b) 当$f(t,\varphi)$为第二类半有界时，$\sum\limits_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_i+\frac{a^2}{2m(a)}}F(t,a)\mathrm{d}t\geq v(H)$，

则方程（1）的零解为一致渐近稳定．

证 先证一致稳定性．对任何给定的$\varepsilon>0$，可选$\delta>0$满足$\delta<\varepsilon$，$\lambda v(\delta)<u(\varepsilon)$．则对任何$\sigma\geq 0$和$\psi\in C_H$，当$|\psi|<\delta$时有$V(\sigma,\psi)\leq v(|\psi|)\leq v(\delta)<u(\varepsilon)$．

为简洁起见，以后用x_t代表$x_t(\sigma,\psi)$，用$x(t)$代表$x(t;\sigma,\psi)$．现要证明：

$$V(t,x_t)<u(\varepsilon)，当t\geq\sigma时． \quad (7)$$

若$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$且$V(t,x_t)\geq\lambda v(|\psi|)$时，由条件（ii）知$\dot{V}(t,x_t)\leq 0$．这表明对一切$t\in[\sigma,\sigma+r_0)$均有$V(t,x_t)\leq\lambda v(|\psi|)<u(\varepsilon)$．因此若（7）不成立，必有$t_1\geq\sigma+r_0$及$0<h<e$，其中$e=\inf\limits_{\frac{u(\varepsilon)}{2}\leq V(t,\varphi)\leq u(\varepsilon)}\{P(t,\varphi)-V(t,\varphi)\}$使得

1° $\frac{u(\varepsilon)}{2}\leq u(\varepsilon)-h<V(t_1,x_{t_1})<u(\varepsilon)$，

2° $V(t,x_t)<V(t_1,x_{t_1})$，当$\sigma\leq t<t_1$时．

由 e 的定义及 1° 和 2° 可得

$$P(t_1, x_{t_1}) \geq V(t_1, x_{t_1}) + e > u(\varepsilon) - h + e > u(\varepsilon) > V(\xi, x_\xi),\quad \sigma \leq \xi \leq t_1.$$

根据条件（ii）知

$$\dot{V}(t_1, x_{t_1}) \leq F(t_1, |x(t_1)|) \leq 0.$$

这与 3° 矛盾. 故（7）式成立. 再由条件（i）便得 $|x(t)| < \varepsilon$ 对一切 $t \geq \sigma$ 成立. 故方程（1）的零解为一致稳定.

下证一致吸引性.

现选 $\delta_0 > 0$ 使得当 $|\psi| < \delta_0$ 时，有 $|x(t)| < H$. 由条件（i）知 $V(t, x_t) \leq v(H)$. 对任给 $\varepsilon \in (0, H)$，取一正数 d 满足 $d < \inf\limits_{u(\varepsilon) \leq V(t,\varphi) \leq v(H)} \{P(t,\varphi) - V(t,\varphi)\}$，又取正整数 N 满足:

$$u(\varepsilon) + (N-1)d < v(H) \leq u(\varepsilon) + Nd.$$

下面我们证明存在 $T_1 > \sigma + r_0$，使得

$$V(T_1, x_{T_1}) < u(\varepsilon) + (N-1)d. \tag{8}$$

若（8）不成立，则有

$$V(t, x_t) \geq u(\varepsilon) + (N-1)d \quad \text{当} t \geq \sigma + r_0 \text{时}. \tag{9}$$

于是

$P(t, x_t) > V(t, x_t) + d \geq u(\varepsilon) + Nd \geq v(H) > V(\xi, x_\xi)$，$\sigma \leq \xi \leq t$，由条件（ii）可得

$$V(t, x_t) \leq v(H) - \int_{\sigma + r_0}^{t} F(s, |x(s)|)\,ds. \tag{10}$$

由（9）及条件（i）知，当 $t \geq \sigma + r_0$ 时，$v(|x_t|) \geq u(\varepsilon)$，故必存在 $a > 0$，使当 $t \geq \sigma + r_0$ 时 $|x_t| \geq \sqrt{2}a$，因此存在一序列 $\{t_i\}$：$\sigma + 2ir \leq t_i \leq \sigma + (2i+1)r, i = 1, 2, \cdots$，使得 $|x(t_i)| \geq \sqrt{2}a$.

现假定 $f(t, \varphi)$ 为第一类半有界（如为第二类半有界可同样地论证）.

如果当 $t \in [t_i - \frac{a^2}{2M(a)}, t_i]$ 时，则由微分中值定理及 $M(a)$ 的定义可得

$$\frac{|x(t_i)|^2}{2} - \frac{|x(t)|^2}{2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{|x(t)|^2}{2}\right)_{t=\xi}(t_i - t)$$

$$= x(\xi)^T f(\xi, x_\xi)(t_i - t) \leq M(a)(t_i - t) \leq \frac{a^2}{2},\ \xi \in [t, t_i].$$

故 $|x(t)|^2 \geq |x(t_i)|^2 - a^2 \geq a^2$，即 $|x(t)| \geq a$.

由（10）及条件（iii）可得

$$V(\sigma + (2k+1)r, x_{\sigma+(2k+1)r}) \leq v(H) - \int_{\sigma + r_0}^{\sigma+(2k+1)r} F(s, |x(s)|)\,ds \leq v(H) - \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i - \frac{a^2}{2M(a)}}^{t_i} F(s, a)\,ds < 0$$

这与 $V(t, \phi) \geq 0$ 矛盾. 故（8）成立. 此时只需取 $T_1 = \sigma + (2k+1)r$ 即可.

下证当 $t \geq T_1$ 时，有

$$V(t, x_t) \leq u(\varepsilon) + (N-1)d \tag{11}$$

若不然，则存在 $\alpha > T_1$ 使得

$u(\varepsilon)+(N-1)d \leq V(a, x_a) < u(\varepsilon)+Nd$ 且 $\dot{V}(a, x_a) \geq 0$.
于是

$P(a, x_a) = V(a, x_a)+d \leq u(\varepsilon)+Nd < v(H) < V(\xi, x_\xi)$, $\sigma \leq \xi \leq a$. 由条件(ii)知
$\dot{V}(a, x_a) \leq -w(|x(a)|) < 0$ 导出了矛盾. 故(11)式成立.

我们以T_1代替$\sigma+r_0$, 以$u(\varepsilon)+(N-1)d$代替$v(H)$, 然后用类似上述的证明方法, 可推得存在$T_2=T_1+(2k+1)r$, 使得当$t \geq T_2$时, 有

$$V(t, x_t) \leq u(\varepsilon)+(N-2)d.$$

再重复上述的证明, 可知存在$T_N=\sigma+N(2k+1)r$, 当$t \geq T_N$时有

$$V(t, x_t) < u(\varepsilon)$$

从而有
$$|x(t)| < \varepsilon.$$

当方程(1)的解满足唯一性的情况下, 我们可利用解对初值的连续依赖性, 将定理3中在$[\sigma, \sigma+r_0]$上的条件去掉, 得到如下的结果:

定理5 若存在前述的函数满足下列的条件:

(i) 对任何$t \geq 0$及$\varphi \in C_H$, 有$u(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|)$.

(ii) 存在$r_0 \in [0, r]$, 使得当$t \geq \sigma+r_0$且$P(t, x_t) > V(\xi, x_\xi)$, $t-r_0 \leq \xi \leq t$时, 有

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -w(|x(t)|).$$

(iii) $f(t, \varphi)$为半有界.

则方程(1)的零解为稳定且一致吸引. 证明从略.

参 考 文 献

[1] J.K.Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1977.

[2] J.K.Hale, Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[3] T.Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, Math. Soc. Japan, 1966.

[4] Н.Н.Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М.физматгиз, 1959.

[5] Б.С.Разумихин, Об устойчивости систем с запаздыванием, ПММ, 20 No.4 1956

[6] 温立志, On the uniform asymptotic stability in functional differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.85, No.4, 1982.